UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

FACULTADA DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

“CONTROLABILIDAD Y ESTABILIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES”

Tesis presentada por la Bachiller:

Noelia Noemi Delgadillo Rodriguez

Para optar el título profesional de Licenciada en Matemáticas

Asesor: **Mg. Edwing Alexander Gonzales Quilca**

AREQUIPA - PERÚ

2019

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

FACULTADA DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

“CONTROLABILIDAD Y ESTABILIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES”

Bach. Noelia Noemi Delgadillo Rodriguez

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias Naturales y Formales de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa para optar el título profesional de Licenciada en Matemáticas.

JURADO DICTAMINADOR:

Dr. Ángel Carlos Wilfredo Sangiacomo Carazas

Mg. Yaan Agustín Bedoya Barriga

Mg. Edwing Alexander Gonzales Quilca

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

“Controlabilidad y Estabilidad de Ecuaciones Diferenciales Parciales**”**

Bach. Noelia Noemi Delgadillo Rodriguez

Tesis de licenciatura

Escuela Profesional de Matemáticas
Facultad de Ciencias Naturales y Formales
Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa

Diciembre de 2019

Arequipa, Perú

Agradecimientos

A Dios, por darme la vida, cuidarme y protegerme.

A mi familia por su apoyo incondicional, en todo sentido.

Deseo expresar mi mayor agradecimiento a mis asesores de tesis al Dr. Dugán Paúl Nina Ortiz, por su amistad y paciencia en la elaboración de este trabajo de tesis, por todas sus enseñanzas matemáticas y correcciones. A Mg. Edwing Alexander Gonzales Quilca, por su amistad, comprensión que ayudaron en la culminación del trabajo tesis.

Resumen

En este trabajo estudiaremos la controlabilidad de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). El enfoque principal está en la propiedad de controlabilidad exacta, que corresponde a la pregunta de si la solución de una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) se puede llevar a un estado determinado en un momento final dado mediante un control sobre una subregión del dominio o de la frontera. Veremos que dicha propiedad es equivalente a una propiedad de observabilidad para el sistema adjunto. El estudio de la controlabilidad exacta se detalla por ejemplo en la ecuación de onda y la ecuación de calor en una dimensión. La última parte de este trabajo está dedicada a la estabilización y a sus conexiones con la propiedad de controlabilidad.

Palabras clave: Controlabilidad exacta, controlabilidad aproximada, observabilidad, ecuaciones diferenciales parciales.

ABSTRACT

This paper surveys several issues related to the control of partial differential equations (PDE). The main focus is on the exact controllability property, which corresponds to the question of whether the solution of a PDE can be driven to a given state at a given final time by means of a control acting on a subregion of the domain or of the boundary. It is demonstrated that such a property is equivalent to an observability property for the adjoint system. The study of the exact controllability is detailed for example in the wave equation and the heat equation, in dimension one. The last part of the paper is devoted to the stabilization issue and to its connections with the controllability properties.

Keywords: Exact controllability, approximate controllability, observability, partial - differential equations.

Índice general

Introducción

El objetivo del presente trabajo es estudiar el control de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Entre las numerosas aplicaciones del control de una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) se pueden mencionar: la reducción de ruido (ecuación de onda), la reducción de vibraciones (ecuaciones de placa), la reducción de la turbulencia (ecuación de Navier-Stokes), el control por láser de las reacciones químicas (ecuación de Schrodinger).

Mientras que el control de las ecuaciones diferenciales ordinarias que se remontan a la invención de J. Watt, de su motor de vapor, se entiende en el marco lineal, el control de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) es un campo de investigación bastante reciente y muy atractivo, incluso en un marco lineal.

Una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) lineal surge en un problema de evolución que puede ser de tipo hiperbólico (ecuación de onda, ecuaciones de Maxwell) o de tipo dispersivo (ecuación de placa, ecuación de Schrdinger, ecuación de Korteweg-de Vries) o de tipo parabólico (ecuación de calor, ecuación de Stokes) y que el flujo correspondiente hereda propiedades muy específicas de la Ecuación Diferencial Parcial (EDP): el principio de Huygens y la propiedad de propagación de singularidades, se cumple para ecuaciones hiperbólicas, mientras que la propiedad de propagación de velocidad infinita junto con un efecto de suavizado débil (respectivamente fuerte) se mantiene para ecuaciones dispersivas (respectivamente parabólicas). Como veremos estas propiedades tienen una fuerte influencia en las propiedades de control de las diferentes Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). Incluso si la controlabilidad de una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) siempre puede reducirse a una desigualdad utilizando herramientas adaptadas a la Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) bajo investigación, por ejemplo, el análisis microlocal que proporciona resultados nítidos para la ecuación de onda, o las estimaciones de Carleman para la controlabilidad nula de la ecuación de calor. Se han desarrollado otros métodos para el control de las ecuaciones de onda, por ejemplo, el método de la serie de Fourier no armónico (bien adaptado para una dimensión) a través del método multiplicativo y el método de compacidad y unicidad. La teoría de control de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) está bien desarrollado, uno puede ser tentado a controlar, realizando una reducción a un modelo de dimensión finita (por ejemplo, mediante un procedimiento de Galerkin, o mediante una discretización por diferencias finitas, o simplemente por identificación) y luego a controlar la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).

Este enfoque tiene como inconveniente que el control para el sistema de dimensión finita puede no converger hacia una entrada de control exacto para la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) ya que la dimensión de un sistema de dimensión finita tiende al infinito (ver Zuazua (2005)).

La controlabilidad es la propiedad más estudiada para una Ecuación Diferencial Parcial (EDP), probablemente porque una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) controlable también es estable y lo contrario es cierto para una amplia clase de Ecuación Diferencial Parcial (EDP) que incluye la ecuación de onda y la ecuación de Schrödinger. Tenga en cuenta que para una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) tenemos a nuestra disposición tres conceptos de controlabilidad, a saber, la controlabilidad exacta (cualquier par de vectores de estado puede estar conectados por una trayectoria) la controlabilidad nula (cualquier vector de estado puede dirigirse a 0) y la controlabilidad aproximada (cualquier vector de estado puede dirigirse arbitrariamente a otro vector de estado). En las definiciones anteriores, el espacio funcional en el que vive el estado (por ejemplo, el espacio $L^2(\Omega)$ de la función cuadrado integrable para la distribución de la temperatura en el tiempo t para la ecuación de calor) y la duración del control debe ser especificada. Para el problema de la estabilización, consideraremos principalmente la estabilidad fuerte (el vector de estado tiende a 0) y la estabilidad exponencial (la convergencia es uniforme y exponencial). Ahora podemos describir con precisión, el contenido del trabajo.

Los diversos conceptos de controlabilidad que concuerdan en dimensión finita pero no en general para una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) se presenta y se caracterizan gracias al enfoque de dualidad clásica (ver Dolecky (1977) & Lions (1988)). Por ejemplo, se muestra que la controlabilidad exacta de un sistema es equivalente a la observabilidad del sistema adjunto.

La controlabilidad de la Ecuación Diferencial Parcial (EDP) más popular en las familias descritas anteriormente, la ecuación de onda (hiperbólica), y la ecuación de calor (parabólica). Para cada una de estas ecuaciones, se establece un resultado de controlabilidad y se prueba en una dimensión. Algunos resultados importantes, como la variable espacial viven en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ (se dan junto con las referencias).

La controlabilidad en la frontera de la ecuación de onda unidimensional (1-D) se demostrará mediante el uso de series de Fourier. La controlabilidad nula de la ecuación de calor se deriva de algunas estimaciones de Carleman.

La última sección está dedicada al lema de la estabilización. La estabilidad de una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) se define y se relaciona con los conceptos de controlabilidad anteriores. Se presta especial atención a una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) con un generador infinitesimal auto adjunto (se refiere a la ecuación de onda) por cuyos conceptos de controlabilidad y estabilización se consideran aquí.

El presente trabajo se ha estructurado en tres capítulos. En el primer capítulo recopilamos información preliminar para estudiar la controlabilidad de las ecuaciones diferenciales parciales.

En el segundo capítulo se dará las definiciones de controlabilidad y observabilidad de las ecuaciones diferenciales parciales.

Finalmente, en el tercer capítulo se estudiará la controlabilidad de la ecuación de onda y la ecuación de calor.

El objetivo general del presente trabajo es: Estudiar la controlabilidad de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP).

Mientras que los objetivos especificos son:

- Conocer conceptos básicos de los espacios de Hilbert, análisis funcional y conceptos de controlabilidad.
- Estudiar la controlabilidad de la ecuación de onda.
- Estudiar la controlabilidad de la ecuación de calor.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos algunas definiciones básicas e importantes para el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Operadores lineales continuos en espacios de Hilbert

Sean H y G dos espacios normados y denotemos $\|\cdot\|$ indistintamente las normas de H y G. Consideraremos aplicaciones $T : H \to G$ lineales y continuas.

Si $T : H \to G$ es lineal, entonces es continua si y solo si es acotada, es decir, si

$$\exists M > 0 \ \text{ tal que } \ \|Tx\| \leq M \|x\| \ \text{ para cada } x \in H$$

El conjunto $\mathcal{L}(H\,;G)$ de los operadores lineales continuos $T : H \to G$ es un espacio vectorial para las operaciones habituales. En este espacio vectorial.

$$\|T\|_{\mathcal{L}} := \sup_{x\in H, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

es una norma. Luego podemos hablar del espacio normado de los operadores lineales continuos de H en G, que denotamos como $\mathcal{L}(H\,;G)$. Así, vemos que si G es un espacio de Banach (es decir, un espacio normado completo), entonces $\mathcal{L}(H\,;G)$ también lo es.

Cuando $H = G$ escribiremos $\mathcal{L}(H)$ en lugar de $\mathcal{L}(H\,;G)$. En el caso particular en qué $G = \mathbb{R}$, el espacio (de Banach) $\mathcal{L}(H;\mathbb{R})$ se denota H' y se denomina dual topológico (o simplemente dual) de H.

Recordemos que, si H es un espacio de Hilbert (esto es, se trata de un espacio normado completo cuya norma es inducida por un producto escalar), entonces H puede identificarse algebraica y topológicamente con su dual. Esto es justamente lo que dice el teorema de representación de Riesz, que enunciamos a continuación.

Teorema 1.1 *Dado $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{para todo} \quad v \in H$$

ademas se verifica $|f| = \|\varphi\|_{H'}$.

Demostración. Véase Brezis (1984, pag. 81). ∎

Este teorema muestra que toda forma lineal continua sobre H se puede representar por medio del producto escalar. La aplicación $\varphi \to f$ es un isomorfismo isométrico que permite identificar H y H'.

Cuando sea conveniente, podemos identificar un espacio de Hilbert H con su dual H'.

Definición 1.1 *Sean H y G dos espacios de Hilbert cuyos productos escalares serán denotados indistintamente $(\cdot, \cdot)$ y sea $T \in \mathcal{L}(H; G)$. Se llama operador adjunto de T al único operador $T^* \in \mathcal{L}(G; H)$ que verifica*

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \text{ para todo } x \in H, \ y \in G \tag{1.1}$$

Si $H = G$ y $T^* = T$, se dice que T es autoadjunto.

Así, el concepto de operador adjunto generaliza el concepto de matriz transpuesta.

Proposición 1.1 *Sean H y G dos espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H; G)$. Entonces:*

1. $(T^*)^* = T$ *y* $\|T^*\| = \|T\|$
2. *Si* $S \in \mathcal{L}(H; G)$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *entonces* $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$
3. *Si* F *es otro espacio de Hilbert y* $S \in \mathcal{L}(G; F)$, *entonces* $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
4. T *es biyectivo si y solo si* T^* *lo es. En tal caso* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Demostración. Tenemos

1. Sea $T \in \mathcal{L}(H\,; G)$. Se verifica que

$$\langle y, (T^*)^* x\rangle = \langle T^* y, x\rangle = \overline{\langle x, T^* y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle$$

   Luego, T^* es lineal, además,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\left\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_H = \|y\|_G = 1\right\} \\ &= \sup\left\{|\langle x, T^* y\rangle| = |\langle T^* y, x\rangle| : \|x\|_H = \|y\|_G = 1\right\} \\ &= \|T^*\| \end{aligned}$$

2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $T, S \in \mathcal{L}(H; G)$, $x \in H$, $y \in G$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, (\alpha T + \beta S(y))^*\rangle &= \langle(\alpha T + \beta S)(x), y\rangle \\ &= \alpha\langle T(x), y\rangle + \beta\langle S(x), y\rangle \\ &= \alpha\langle x, T^*(y)\rangle + \beta\langle x, S^*(y)\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y)\rangle + \langle x, \beta S^*(y)\rangle \\ &= \langle x, (\alpha T^* + \beta S^*)(y)\rangle \end{aligned}$$

3. Sean $T, S \in \mathcal{L}(H; G)$, $x \in H$, $y \in G$. Luego,

$$\begin{aligned} \langle x, (S \circ T)^*(y)\rangle &= \langle(S \circ T)(x), y\rangle \\ &= \langle S(Tx), y\rangle \\ &= \langle Tx, S^* y\rangle \\ &= \langle x, T^*(S^*)\,y\rangle \\ &= \langle x, (T^* \circ S^*)\,y\rangle \end{aligned}$$

4. Sean $T \in \mathcal{L}(H;G)$, $x \in H$, $y \in G$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle x, \left(T^{-1}\right)^* y \right\rangle &= \left\langle T^{-1}x, y \right\rangle \\
&= \left\langle T^{-1}x, \left(T^* \circ (T^*)^{-1}\right) y \right\rangle \\
&= \left\langle T^{-1}x, \left(T^* (T^*)^{-1}\right) y \right\rangle \\
&= \left\langle \left(T \circ T^{-1}\right) x, (T^*)^{-1} y \right\rangle \\
&= \left\langle x, (T^*)^{-1} y \right\rangle
\end{aligned}$$

■

1.2. Propiedades elementales de los espacios L^P

Apartir de ahora Ω denotará un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$ es un entero). Se designa por $L^1(\Omega)$ el espacio de las funciones integrables sobre Ω con valores de $\mathbb{R}$. Se escribe,

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

Recordaremos a continuación algunas nociones y resultados relacionados con los espacios L^p.

Denotaremos $\mathcal{M}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones $v : \Omega \to \mathbb{R}$ que son medibles. Si $v \in \mathcal{M}(\Omega)$ y es no negativa, se puede hablar de su integral en Ω respecto de la medida de Lebesgue (finita o no). En ambos casos, esta se denota

$$\int_\Omega v(x)\, dx \tag{1.2}$$

Si $v \in \mathcal{M}(\Omega)$, se dice que v es integrable si las funciones $v_+ = máx(v,0)$ y $v_- = máx(-v,0)$ (que son medibles y no negativas) poseen integral finita. En tal caso, llamaremos integral de v en Ω al número real

$$\int_\Omega v(x)\, dx = \int_\Omega v_+(x)\, dx - \int_\Omega v_-(x)\, dx \tag{1.3}$$

Denotaremos $\mathcal{L}^1(\Omega)$ el subconjunto de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones medibles e integrables.

Dada $v \in \mathcal{M}(\Omega)$, se tiene que $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ si y solo si $|v| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ y esto ocurre si y solo si

$$\int_{\Omega} |v(x)|\, dx < \infty$$

por tanto

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_{\Omega} |v(x)|\, dx < +\infty \right\}$$

generalmente, para cada $p \in [1, +\infty)$, denotaremos $\mathcal{L}^p(\Omega)$ el siguiente conjunto

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_{\Omega} |v(x)|^p\, dx < +\infty \right\}$$

para cada p, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)$. Esto es consecuencia de la llamada desigualdad triangular (o desigualdad de Minkowski)

$$\left(\int_{\Omega} |u+v|^p\, dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p\, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |v|^p\, dx \right)^{1/p} \tag{1.4}$$

para cada $u, v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

Sea $\mathcal{N}$ el subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ formado por las funciones que se anulan c.t.p. en Ω (donde c.t.p. es casi en todas partes). Entonces $\mathcal{N} \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ para cada p y, dada $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, tenemos que $v \in \mathcal{N}$ si y solo si

$$\int_{\Omega} |v|^p\, dx = 0$$

Para poder trabajar en un marco funcional adecuado, nos interesara considerar el espacio-cociente $M(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$ (con las operaciones suma y producto por un escalar inducidas por las operaciones de $\mathcal{M}(\Omega)$ del modo habitual).

Obsérvese que $C^0(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ y que dos funciones de $C^0(\Omega)$ que coinciden c.t.p. necesariamente coinciden en todo punto $x \in \Omega$. Por tanto, no hay ambiguedad al identificar cada función de $C^0(\Omega)$ con la clase de $M(\Omega)$ a la que pertenece y podemos admitir que $C^0(\Omega)$ es un subespacio de $M(\Omega)$.

Si dos funciones de $\mathcal{M}(\Omega)$ coinciden c.t.p. en Ω y una de ellas es integrable,también lo es la otra y sus integrales coinciden. Por tanto, tiene sentido considerarlos espacios-cociente $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}$. Para cada clase $v \in L^p(\Omega)$, la integral de $|v|^p$ en Ω es por definición la integral en el sentido que precede de cualquiera de las funciones de la clase $|v|^p$.

Utilizaremos de nuevo la notación

$$\int_{\Omega} |v|^p \, dx$$

para designar la integral en Ω de una clase $v \in L^p(\Omega)$. Así,

$$L^p(\Omega) = \left\{ v \in M(\Omega) : \int_{\Omega} |v(x)|^p \, dx < +\infty \right\}$$

por supuesto, la desigualdad (1.4) es también cierta cuando $u, v \in L^p(\Omega)$. En consecuencia, $L^p(\Omega)$ es un espacio normado para la norma $\|\cdot\|_{L^p}$, definida por

$$\|v\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad \text{para todo } v \in L^p(\Omega)$$

se puede demostrar que este espacio normado $L^p(\Omega)$, es completo. En particular, dado que la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ está inducida por el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{L^2}$, donde

$$(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv dx, \quad \text{para todo } u, v \in L^p(\Omega)$$

resulta que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Por otra parte, denotaremos $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$ el subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones medibles acotadas y pondremos $L^{\infty}(\Omega) = \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)/\mathcal{N}$. En este espacio vectorial, consideraremos la norma $\|v\|_{L^{\infty}}$, con

$$\|v\|_{L^{\infty}} = \text{ínf}\{M > 0 : |v(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } \Omega\}, \quad \text{para todo } v \in L^{\infty}(\Omega)$$

con esta norma, $L^{\infty}(\Omega)$ es de nuevo un espacio de Banach.

Recordemos la siguiente propiedad, llamada desigualdad de Hölder, válida para cada $p \in [1, +\infty)$: Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}} \tag{1.5}$$

aquí, p' es el exponente conjugado de p, definido por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{1.6}$$

recordemos también que, para cada $p \in [1, +\infty)$, se tiene la propiedad de convergencia dominada en $L^p(\Omega)$: Si $\{u_n\}$ es una sucesión en $L^p(\Omega)$, existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ para x c.t.p. en Ω y existe una función $v \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq v(x)$ c.t.p. en Ω para cada $n \geq 1$, entonces $u \in L^p(\Omega)$ y además

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0$$

Definición 1.2 *Sea $v \in M(\Omega)$. Se dice que v es localmente integrable en Ω si, para cada compacto K, se tiene $v1_K \in L^1(\Omega)$. El conjunto de las (clases de) funciones v localmente integrables en Ω es un subespacio vectorial de $M(\Omega)$ y se denota $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Es claro que $C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ y que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para cada $p \in [1; +\infty)$.

Definición 1.3 *Sea $1 \leq p \leq \infty$; se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f1_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Definición 1.4 *Sea $\varphi \in C^0(\Omega)$. Llamaremos soporte de φ (denotado $\operatorname{supp}\varphi$), a la adherencia del conjunto $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$.*

Observación 1.1 *Sean*

1. *Se designa por $C_c(\Omega)$ el espacio de las funciones en Ω con soporte compacto, es decir,*

   $$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega)\,;\, f(x) = 0, \text{ para todo } x \in \Omega \diagdown K \text{ donde } K \subset \Omega \text{ es un compacto}\}$$

2. *$C^k(\Omega)$ designa el espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables sobre Ω. Así*

   $$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &= \bigcap_k C^k(\Omega) \\ C^k_c(\Omega) &= C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega) \\ C^\infty_c(\Omega) &= C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) \end{aligned}$$

   donde el espacio $C^\infty_c(\Omega) = D(\Omega)$.

Lema 1.1 *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$, existe una función $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que $\varphi > 0$ en $B(x_0, r)$ y $\operatorname{supp}\varphi = \overline{B}(x_0, r)$.*

Demostración. En efecto, sea ψ la función de $C^{\infty}(\mathbb{R})$ dada por:

$$\psi(s) = e^{1/s} 1_{\{s<0\}}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}$$

Entonces basta tomar $\varphi(x) \equiv \psi\left(|x - x_0|^2 - r^2\right)$. ■

A partir del lema (1.1) se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2 *Dado un compacto no vacío $K \subset \Omega$, existe una función $\varphi \in D(\Omega)$ tal que $0 \leq \rho \leq 1$ y $\varphi = 1$ en un entorno de K.*

Demostración. En primer lugar, sea $\rho \in D\left(\mathbb{R}^N\right)$ una función positiva en la bola $B(0,1)$ y nula en su complemento. En virtud del lema (1.1), existe ρ. Multiplicando ρ si hiciera falta por una constante positiva, podemos suponer que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1 \tag{1.7}$$

sea ε una cantidad positiva. Pongamos

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \rho\left(\varepsilon^{-1} x\right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy, \text{ para todo } x \in \Omega \tag{1.8}$$

se tiene entonces que, si ε es suficientemente pequeño, φ_ε está bien definida para todo $x \in \Omega$ y verifica $\varphi_\varepsilon \in C^{\infty}(\Omega)$. Además,

$$0 \leq \varphi_\varepsilon \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy = 1, \text{ para todo } x \in \Omega$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto $K_{3\varepsilon}$ es un compacto contenido en Ω. Por otra parte, si $x \in K_\varepsilon$,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\, 1_{K_{2\varepsilon}}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y)\, 1_{K_{2\varepsilon}}(x-y)\, dy = 1$$

mientras que, si $x \in K_{3\varepsilon}$, la bola $B(x;\varepsilon)$ no corta a $K_{2\varepsilon}$ y

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y)\, 1_{K_{2\varepsilon}}(x-y)\, dy = 0$$

esto termina la demostración. ■

Se tiene el siguiente resultado de densidad:

Teorema 1.2 *Para cada* $p \in [1, +\infty)$, $D(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$.

Demostración. Sean $p \in [1, +\infty)$ y $v \in L^p(\Omega)$. Probaremos que, para cada $k > 0$, existe una función $\varphi \in D(\Omega)$ que verifica

$$\|v - \varphi\|_{L^p} \leq k \tag{1.9}$$

Etapa 1: Para cada $\delta > 0$, sea $K(\delta)$ el compacto siguiente

$$K(\delta) = \{x \in \Omega : dist\,(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$$

pongamos $v_\delta = v 1_{K(\delta)}$. Entonces

$$\|v - v_\delta\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |v|^p \, 1_{\Omega \setminus K(\delta)} \right)^{1/p}$$

converge a cero, gracias al teorema de la convergencia dominada. Por tanto, eligiendo δ suficientemente pequeño, tenemos:

$$\|v - v_\delta\|_{L^p} \leq \frac{k}{2} \tag{1.10}$$

Etapa 2: Fijemos δ tal que se tenga (1.10) y sea $K = K(\delta)$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea ρ_ε la función introducida en la demostración de la proposición 1.2. Pongamos

$$\omega_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y)\, v_\delta(y)\, dy, \quad x \in \Omega \tag{1.11}$$

entonces, si ε es suficientemente pequeño, ω_ε cumple lo deseado. En efecto, ω_ε está bien definida para todo $x \in \Omega$ y verifica $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto K_ε es un compacto contenido en Ω. Si $x \neq K_\varepsilon$, la bola $B(x, \varepsilon)$ no corta a K, entonces

$$\omega_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y)\, v_\delta(x - y)\, dy = 0$$

Por tanto, para ε suficientemente pequeño, $\omega_\varepsilon \in D(\Omega)$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\|v_\delta - \omega_\delta\|^p &= \int_\Omega \left| \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y) \left(v_\delta(x) - v_\delta(x-y)\right) dy \right|^p dx \\
&\leq \int_\Omega \|\rho_\varepsilon\|_{L^{p'}}^p \int_{B(0,\varepsilon)} |v_\delta(x) - v_\delta(x-y)|^p \, dydx \\
&\leq C \int_{B(0,\varepsilon)} \left(\int_\Omega |v_\delta(x) - v_\delta(x-y)|^p \, dx \right) dy
\end{aligned}$$

donde C es independiente de ε. Por tanto, para ε suficientemente pequeño, tenemos:

$$\|v_\delta - \omega_\delta\|_{L^p} \leq \frac{k}{2} \tag{1.12}$$

combinando (1.10) y (1.11), obtenemos (1.9), para $\varphi = \omega_\varepsilon$. ■

Corolario 1.1 *Sea $u \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0$$

Entonces $u \equiv 0$ c.t.p.

Demostración. Gracias al teorema (1.2), $D(\Omega)$ es un subespacio denso de $L^2(\Omega)$. Por tanto, $D(\Omega)^\perp = \{0\}$ y, en las condiciones del corolario, $u \in D(\Omega)^\perp$. ■

Observación 1.2 *Este resultado también es cierto cambiando $L^2(\Omega)$ por $L^p(\Omega)$ con p cualquiera en $[1, +\infty)$. De hecho, veremos mas adelante que es cierto pidiéndole a u tan solo que pertenezca a un espacio adecuado que contiene a todos los $L^p(\Omega)$ (véase la proposición 1.3).*

Corolario 1.2 *Para cada $p \in [1, +\infty)$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable.*

Demostración. Sea$\{K_n\}$ una sucesión no decreciente de compactos contenidos en Ω, con $\Omega = \underset{n\geq 1}{\cup} K_n$. Para cada $n \geq 1$, se considera el conjunto Z_n de las funciones polinómicas en K_n con coeficientes racionales. Dada $z \in Z_n$, designaremos $\widetilde{z}$ la correspondiente función prolongada por cero a todo Ω y llamaremos Z al conjunto de las funciones $\widetilde{z}$ obtenidas de este modo.

Es obvio que Z es numerable (es unión numerable de conjuntos numerables). Por otra parte, Z es denso en $L^p(\Omega)$. En efecto, sean $v \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Gracias al teorema

1.2, sabemos que existe $\varphi \in D(\Omega)$ tal que

$$\|v - \varphi\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Sean $n \geq 1$ tal que K_n contiene al soporte de ϕ, c_n la medida (de Lebesgue) de K_n y $z \in Z_n$ tal que

$$\|\varphi - z\|_{C^0(K_n)} = \max_{x \in Z_n} |\varphi(x) - z(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2c_n^{1/p}}$$

La existencia de z está garantizada por la densidad de Z_n en $C^0(K_n)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\|v - \widetilde{z}\|_{L^p} &\leq \|v - \varphi\|_{L^p} + \|\varphi - \widetilde{z}\|_{L^p} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{K_n} |\varphi(x) - z(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

∎

Observación 1.3 *El espacio de Banach $L^\infty(\Omega)$ no es separable. Para una demostración de esta afirmación, véase Brezis (1984, pag. 66). Con una demostración similar a la del teorema 1.2, tenemos:*

Teorema 1.3 *Sea $p \in [1, +\infty)$. Dada $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones de $D(\Omega)$ tales que*

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p} \to 0, \quad \|\partial_i \varphi_n - \partial_i \varphi\|_{L^p} \to 0, \text{ para todo } i = 1, ..., N \tag{1.13}$$

El resultado siguiente es una importante generalización del corolario 1.1.

Proposición 1.3 *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi dx = 0, \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

entonces $u = 0$ c.t.p.

Demostración. Supongamos en primer lugar que Ω es acotado y que $u \in L^1(\Omega)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $\psi_\varepsilon \in D(\Omega)$ tal que

$$\|u - \psi_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon$$

para cada $\varphi \in D(\Omega)$, tenemos entonces que

$$\left| \int_\Omega \psi_\varepsilon \varphi dx \right| = \left| \int_\Omega (\psi_\varepsilon - u)\, \varphi dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty}$$

Sean K_+ y K_- los dos conjuntos siguientes:

$$K_+ = \{x \in \Omega : \psi_\varepsilon(x) \geq \varepsilon\}, \qquad K_- = \{x \in \Omega : \psi_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon\}$$

entonces K_+ y K_- son dos compactos contenidos en Ω y, usando la proposición 1.2, es fácil probar que existe una función $\varphi_\varepsilon \in D(\Omega)$ que verifica

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1, \qquad \varphi_\varepsilon = 1 \text{ en } \quad K_+, \qquad \varphi_\varepsilon = -1 \text{ en } K_-$$

pongamos $K = K_+ \cup K_-$ y denotemos $c(\Omega)$ la medida de Lebesgue de Ω .Entonces

$$\begin{aligned} \int_K |\psi_\varepsilon(x)|\, dx &= \int_\Omega \psi_\varepsilon \varphi_\varepsilon dx - \int_{\Omega \setminus K} \psi_\varepsilon \varphi_\varepsilon dx \\ &\leq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |\psi_\varepsilon(x)|\, dx \\ &\leq (1 + c(\Omega))\, \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde

$$\|u\|_{L^1} \leq \|u - \psi_\varepsilon\|_{L^1} + \|\psi_\varepsilon\|_{L^1} \leq (2 + c(\Omega))\, \varepsilon$$

Dado que ε es arbitrariamente pequeño, deducimos que $u = 0$ c.t.p.

Supongamos ahora que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto arbitrario y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Para cada $n \geq 1$, sea

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : |x| < n,\ \ dist\left(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right) > 1/n \right\}$$

Es inmediato que cada Ω_n es un abierto acotado, cada $\overline{\Omega}_n$ es un compacto contenido en Ω y que además se tiene

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \ \ n \geq 1, \ \cup_{n \geq 1} \Omega_n = \Omega$$

En cada Ω_n podemos ver como antes que u se anula c.t.p. Gracias a las propiedades precedentes de los Ω_n, es claro que esto implica $u = 0$ c.t.p. en Ω. ■

1.3. Los espacios de Sobolev H^1, H_0^1 y H^{-1}

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.5 *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega);\ \textit{existe } g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \ \textit{tales que} \\ \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \textit{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ \textit{para todo } i = 1, 2, \ldots, N \end{array} \right\}$$

se pone

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se nota

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \qquad y \qquad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \operatorname{grad} u$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

o a veces la noma equivalente $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum\limits_{i=1}^N \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$.

El espacio $H^1(\Omega)$ está dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}$$

la norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

Es equivalente a la norma $W^{1,2}$.

Definición 1.6 *El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dado $1 \leq p < \infty$, se designa por $W_0^{1,p}(\Omega)$ la* *cerradura de $C_c^1(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Se denota*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

El espacio $W_0^{1,p}$ está dotado de la norma inducida por $W^{1,p}$ es un espacio de Banach separable; es reflexivo si $1 < p < \infty$. H_0^1 es un espacio de Hilbert con el producto escalar de H^1.

Empezaremos dando un concepto de derivada parcial mas general.

Definición 1.7 *Sean $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ e $i \in \{1, ..., N\}$. Se dice que u posee derivada generalizada de primer orden respecto de x_i en $L_{loc}^1(\Omega)$ si existe una función $v_i \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega v_i \varphi dx = -\int_\Omega u \partial_i \varphi dx, \ \ \text{para todo } \varphi \in D(\Omega) \tag{1.14}$$

En tal caso, gracias a la proposición 1.3 la función v_i es única, y se denota $\partial_i u$ la cual se denomina derivada generalizada de u respecto de x_i.

Observación 1.4 *El concepto de derivada generalizada en $L_{loc}^1(\Omega)$ es una particularización de otro concepto aun mas útil e interesante. La derivada en el sentido de las distribuciones. Así, dada $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, se llama derivada de u en el sentido de las distribuciones respecto de x_i a la forma lineal $D_i u$, definida como sigue*

$$D_i u(\varphi) = -\int_\Omega u \partial_i \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

si existe $\partial_i u \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que se tiene (1.14), entonces se pueden identificar $D_i u$ y $\partial_i u$ de modo que, en tal caso la derivada de v en el sentido de las distribuciones coincide con la derivada generalizada en $L_{loc}^1(\Omega)$, esto es,

$$D_i u(\varphi) = -\int_\Omega \partial_i u \varphi dx, \ \ \text{para todo } \varphi \in D(\Omega)$$

Veamos a continuación que la definición (1.7) es coherente con la definición clásica de derivada parcial:

Proposición 1.4 *Sea $u \in C^0(\Omega)$ y supongamos que, para todo $x \in \Omega$, existe la derivada parcial habitual $\partial_i u(x)$ y que $\partial_i u \in C^0(\Omega)$. Entonces u posee derivada generalizada en $L_{loc}^1(\Omega)$ respecto de x_i y ésta coincide con $\partial_i u$.*

Demostración. Denotando $\partial_i u$ la derivada parcial de u en el sentido clásico, hay que demostrar que

$$\int_\Omega \partial_i u\varphi dx = -\int_\Omega u\partial_i\varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in D(\Omega) \tag{1.15}$$

Sea $\varphi \in D(\Omega)$. Tenemos que $u\varphi$ posee derivada parcial respecto de x_i en Ω y que

$$\int_\Omega \partial_i (u\varphi)\, dx = \int_\Omega \partial_i u\varphi dx + \int_\Omega u\partial_i\varphi dx \tag{1.16}$$

mostraremos que el primer miembro de (1.16) es cero.

Para ello, denotaremos $\widetilde{u\varphi}$ la prolongación por cero a todo $\mathbb{R}^N$ de la función $u\varphi$. Entonces, si $M > 0$ es suficientemente grande,

$$\int_\Omega \partial_i (u\varphi)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i \left(\widetilde{u\varphi}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{-M}^{M} \partial_i \left(\widetilde{u\varphi}\right) dx_i\right) dx'$$

donde dx' denota el elemento de integración en $\mathbb{R}^{N-1}$. Pero esta última integral es cero, de donde se tiene el resultado deseado. ■

Observación 1.5 *Existen muchas funciones $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ que no poseen derivada en el sentido clásico, pero sí derivada generalizada en $L^1_{loc}(\Omega)$. Esto puede ocurrir incluso cuando $u \in C^0(\Omega)$.*

Definición 1.8 *Se llama espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ al conjunto*

$$H^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : \textit{existe } \partial_i v \in L^2(\Omega) \quad \textit{para} \;\; 1 \leq i \leq N\right\} \tag{1.17}$$

donde las derivadas se extienden en el sentido generalizado de la definición 1.7. Si $v \in H^1(\Omega)$, denotaremos ∇v (o bien Dv) al vector formado por las derivadas parciales generalizadas $\partial_i v$:

$$\nabla v = Dv = (\partial_i v, ..., \partial_N v)$$

diremos que ∇v es el gradiente de v.

Es inmediato que $H^1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$ que contiene a $C^1_0(\Omega)$ y que, si Ω es acotado, $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \subset H^1(\Omega)$.

En el espacio $H^1(\Omega)$ se puede introducir un producto escalar natural. En efecto, pongamos

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}, \quad \text{para todo } u,v \in H^1(\Omega) \tag{1.18}$$

entonces $(\cdot,\cdot)_{H^1}$ es ciertamente un producto escalar.

Teorema 1.4 *Dotado del producto escalar $(\cdot,\cdot)_{H^1}$, $H^1(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert.*

Demostración. La norma inducida por (1.18) es

$$\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2\right)^{1/2}, \ \text{para todo } v \in H^1(\Omega) \tag{1.19}$$

tenemos que comprobar que toda sucesión de Cauchy para esta norma es convergente en $H^1(\Omega)$.

Sea entonces $\{u_n\}$ tal sucesión. Claramente $\{u_n\}$ y $\{\partial_i u_n\}$ $(1 \leq i \leq N)$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$, de donde existen funciones $u, v_1, ..., v_N$ tales que

$$u_n \to u, \quad \partial_i u_n \to v_i \quad \text{en} \ \ L^2(\Omega) \quad (1 \leq i \leq N) \tag{1.20}$$

Veamos que para cada i; v_i es la derivada generalizada de u, con lo cual quedará probado que $u \in H^1(\Omega)$ y que $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$.

Dados i y $\varphi \in D(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega \partial_i u_n \varphi dx = -\int_\Omega u_n \partial_i \varphi dx \tag{1.21}$$

para cada $n \geq 1$. gracias a (1.20), podemos pasar al límite en (1.21) y deducir que

$$\int_\Omega v_i \varphi dx = -\int_\Omega u \partial_i \varphi dx \tag{1.22}$$

pero, como φ es arbitraria en $D(\Omega)$, esto significa que u posee derivada generalizada en $L^2(\Omega)$ respecto de x. Esto prueba lo que queríamos. ■

Teorema 1.5 *El espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ es separable.*

Demostración. Recordemos que el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ es separable. Introduzcamos el espacio producto $Y = L^2(\Omega)^{N+1}$, dotado del producto escalar

$$((u_0, u_1, ...u_N), (v_0, v_1, ..., v_N))_Y = \sum_{i=0}^{N} (u_i, v_i)_{L^2}$$

Entonces Y es un espacio de Hilbert separable.

Sea ahora $J : H^1(\Omega) \to Y$ la aplicación definida por

$$Jv = (v, \partial_1 v, ..., \partial_n v), \text{ para todo } v \in H^1(\Omega)$$

que es lineal, continua, inyectiva e isométrica, es decir, verifica

$$\|Jv\|_Y = \|v\|_{H^1}, \text{ para todo } v \in H^1(\Omega)$$

los espacios $H^1(\Omega)$ y $R(J)$ ($R(J)$ es el rango de la aplicación J) son isomorfos e isométricos. En particular, $R(J)$ es un subespacio cerrado de Y y es por tanto separable. De donde $H^1(\Omega)$ es separable. ■

Observación 1.6 *En general, $D(\Omega)$ no es denso en $H^1(\Omega)$. De hecho, $D(\Omega)$ nunca es denso si Ω es acotado y su frontera es por ejemplo "de clase $C^{0,1}$". Sin embargo, sí lo es cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$ (para la demostración, véase Brezis (1984)). Por otra parte, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega$ "de clase $C^{0,1}$"se puede demostrar que $D(\overline{\Omega})$ (el espacio de las restricciones a Ω de las funciones de $D(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\Omega)$ (véase Casas (1992))).*

Definición 1.9 *Llamaremos $H_0^1(\Omega)$ a la adherencia de $D(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Se trata por tanto de un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ que, para el producto escalar de $H^1(\Omega)$, se convierte en un nuevo espacio de Hilbert separable.*

Observación 1.7 *En virtud de la observación (1.6), $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$, pero esta igualdad no es cierta en general. Se puede demostrar que si $v \in H^1(\Omega)$ y existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $v = 0$ en $\Omega \backslash K$, entonces $v \in H_0^1(\Omega)$. También se puede demostrar que si $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ entonces $v \in H_0^1(\Omega)$; véase Brezis (1984).*

Teorema 1.6 *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y que, o bien Ω es un abierto conexo acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{0,1}$, o bien $\Omega = \mathbb{R}^N$. Existe una única aplicación*

$\gamma \in \mathcal{L}\left(H^1(\Omega); L^2(\partial\Omega)\right)$ *tal que*

$$\gamma\varphi = \varphi\mid_{\partial\Omega}, \quad \textit{para todo } \varphi \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) \tag{1.23}$$

(recuérdese que $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *es el espacio de las restricciones a* Ω *de las funciones de* $C_0^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ *). El espacio* $R(\gamma)$ *está estrictamente contenido en* $L^2(\Omega)$ *y, por otra parte,* - $N(\gamma) = H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Véase Casas (1992). ■

Además se verifica la siguiente propiedad, llamada formula generalizada de integración por partes

$$\int_\Omega u\partial_i v dx = -\int_\Omega \partial_i u v dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u \gamma v n_i d\Gamma, \ \text{ para todo } \ u, v \in H^1(\Omega) \tag{1.24}$$

El resultado precedente suele conocerse como teorema de trazas en $H^1(\Omega)$. La aplicación γ es por definición la traza sobre $\partial\Omega$ (también se dice que $\gamma(v)$ es la traza de v sobre $\partial\Omega$ y es costumbre escribir $\varphi\mid_{\partial\Omega}$ en vez de $\gamma(v)$). En virtud de lo que precede, dada una función $v \in H^1(\Omega)$, decir que $v \in H_0^1(\Omega)$ es, de algún modo, asegurar que "v se anula sobre $\partial\Omega$"(vemos que, en principio, no tiene sentido hablar de los valores de v sobre $\partial\Omega$ es un conjunto de medida nula).

Teorema 1.7 *(desigualdad de Poincaré) Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto no vacío acotado al menos en una dirección. Entonces existe una constante positiva* C *(que sólo depende de* Ω*) tal que*

$$\int_\Omega |v|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \ \textit{para todo } \ v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.25}$$

Demostración. Por densidad, basta probar (1.25) cuando $v \in D(\Omega)$. Denotaremos también v la prolongación por cero de v a todo $\mathbb{R}^N$ (una función $D(\Omega)$).

No es restrictivo suponer que Ω es acotado en la dirección de x_i. Esto quiere decir que existe $M > 0$ tal que $\Omega \subset (M, M) \times \mathbb{R}^{N-1}$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$. Entonces

$$v(x) = \int_{-M}^{x_1} \partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N) dy_1$$

de donde

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &\leq \left(\int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)| \, dy_1 \right)^2 \\ &\leq 2M \int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)| \, dy_1 \end{aligned}$$

Integrando respecto de x en Ω, ahora tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v(x)|^2 \, dx &\leq 2M \int_\Omega \int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)|^2 \, dy_1 dx \\ &\leq 4M^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \ldots, x_N)|^2 \, dy_1 dx' \end{aligned} \tag{1.26}$$

donde $C = 4M^2$ y dx' denota el elemento de integración en $\mathbb{R}^{N-1}$ respecto de las variables $x_2, \ldots, x_N$. De (1.26), de donde se deduce (1.25).

Obsérvese que la desigualdad (1.25) es falsa en general para las funciones de $H^1(\Omega)$. Si el abierto Ω es acotado al menos en una dirección, tiene entonces sentido definir un nuevo producto escalar en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, pongamos

$$(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2}, \text{ para todo } u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.27}$$

Entonces gracias a (1.25), $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$ es un verdadero producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ induce en este espacio una norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$ que es equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{H^1}$. ■

Definición 1.10 *Denominaremos $H^{-1}(\Omega)$ al dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.*

Tenemos que $H^{-1}(\Omega)$ es un nuevo espacio de Hilbert, isomorfo e isométrico a $H_0^1(\Omega)$. El resultado que sigue proporciona una importante caracterización de $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1.8 *Sean $f_1, f_2, ..., f_N \in L^2(\Omega)$ y sea $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ la forma lineal definida como sigue*

$$F(v) = \int_\Omega \left(f_0 v + \sum_{i=1}^{N} f_i \partial_i v \right) dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.28}$$

entonces $F \in H^{-1}(\Omega)$. Además, si denotamos $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ la norma en $H^{-1}(\Omega)$ inducida por la norma de $H^1(\Omega)$,

$$\|F\|_{H^{-1}} \leq \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \tag{1.29}$$

Recíprocamente, si $F \in H^{-1}(\Omega)$, existen $N+1$ funciones $f_0, f_1, ..., f_N \in L^2(\Omega)$ tales que se tiene (1.28) y

$$\|F\|_{H^{-1}} = \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \tag{1.30}$$

Demostración. Supongamos en primer lugar dadas $f_0, f_1, ..., f_N \in L^2(\Omega)$. Es entonces inmediato que la forma lineal F definida por (1.28) es continua. Por tanto, $F \in H^{-1}(\Omega)$. Además,

$$|F(v)| \leq \|f_0\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \sum_{i=0}^{N} \|f_i\|_{L^2} \|\partial_i v\|_{L^2} \leq \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \|v\|_{H^1}$$

de donde tenemos (1.29).

Recíprocamente, sea $F \in H^{-1}(\Omega)$. Por lo teorema 1.1, existe $u_F \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_F\|_{H^1} = \|F\|_{H^{-1}}, \quad (u_F, v)_{H^1} = F(v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

tomando $f_0 = u_F$ y $f_i = \partial_i u_F$ para $1 \leq i \leq N$, tenemos (1.28) y (1.30). ■

Observación 1.8 *Si Ω es acotado al menos en una dirección, las afirmaciones que se hacen en el teorema 1.8 son ciertas con $f_0 = 0$ (en tal caso, en (1.30), $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ debe denotar la norma en $H^{-1}(\Omega)$ inducida por $\|\cdot\|_{H_0^1}$).*

Si $F \in H^{-1}(\Omega)$ está definida por (1.28), donde las $f_0, f_1, ..., f_N$ son funciones de $L^2(\Omega)$, pondremos

$$F = f_0 - \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i \tag{1.31}$$

Esta notación está motivada por el hecho de que, si las $f_0, f_1, ..., f_N$ son suficientemente regulares, entonces

$$F(\varphi) = \int_\Omega \left(f_0 - \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i \right) \varphi dx$$

para cada $\varphi \in D(\Omega)$ y, por tanto, también para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

En particular, podemos definir siempre la derivada de una función de $L^2(\Omega)$, en el sentido que determina (1.28), como un elemento de $H^{-1}(\Omega)$.

En lo que sigue, usaremos el teorema 1.1 para identificar $L^2(\Omega)$ con su dual. Por el contrario, no haremos uso de la identificación posible de $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$, sino que utilizaremos la fórmula (1.28) para describir los elementos de $H^{-1}(\Omega)$. De este modo,

$L^2(\Omega)$ puede identificarse con un subespacio de $H^{-1}(\Omega)$ y podemos escribir que, salvo isomorfismos isométricos,

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \tag{1.32}$$

Observación 1.9 *Una manera informal de interpretar (1.32) consiste en decir que las funciones de $H_0^1(\Omega)$ están en $L^2(\Omega)$ (aunque en el segundo espacio hay más funciones que en el primero) y que, por otra parte, las funciones de $L^2(\Omega)$ determinan formas lineales continuas sobre $H_0^1(\Omega)$ (aunque hay formas lineales continuas que no están definidas por elementos de $L^2(\Omega)$). Para convencerse de esto último, basta elegir $N = 1$ y $\Omega = (-1, 1)$ y considerar la forma lineal F, dada como sigue*

$$F(v) = \int_0^1 v'(x)\,dx, \quad \textit{para todo} \quad v \in H_0^1(-1,1)$$

Razonando como en la demostración del teorema (1.8), se deduce que para cada $F \in (H^1(\Omega))'$ existen $N+1$ funciones $f_0, f_1, ..., f_N \in L^2(\Omega)$ tales que

$$F(v) = \int_\Omega \left(f_0 v + \sum_{i=1}^N f_i \partial_i v \right) dx, \text{ para todo } v \in H^1(\Omega)$$

y

$$\|F\|_{(H^1)'} = \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 1.9 *Sea H un espacio de Banach reflexivo, K un subconjunto convexo cerrado de H y $\varphi : K \to \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades*

φ es convexo

φ es semi continuo inferior

Si K es no acotado entonces φ es coercivo, es decir,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = \infty \tag{1.33}$$

Entonces φ alcanza su mínimo en K, es decir, existe $x_0 \in K$ tal que

$$\varphi(x_0) = \min_{x \in K} \varphi(x) \tag{1.34}$$

Demostración. Véase Zuazua E. (2005). ■

Teorema 1.10 *(Identidad de Parseval) Si f es 2π periódica y además $f \in L^2\left([-\pi,\pi];\mathbb{R}\right)$, entonces la serie de Fourier de f converge en la norma de $L^2\left([-\pi,\pi];\mathbb{R}\right)$ a la función f. Además,*

$$\|f\|_2^2 = \frac{\pi\left|a_0\right|^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n\right|^2 + \left|b_n\right|^2\right) \tag{1.35}$$

Demostración. Véase Brezis (1984, pag. 85). ■

Teorema 1.11 *(Ingham) Sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de numeros reales y $\gamma > 0$ tal que*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

para cualquier real T con

$$T \geq \pi/\gamma \tag{1.36}$$

existe una constante positiva $C_1 = C_1(T,\gamma) > 0$ tal que, para cualquier sucesión finita $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$C_1\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_n\right|^2 \leq \int_{-T}^{T}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt \tag{1.37}$$

Demostración. Véase Micu S. and Zuazua E. (2005). ■

Capítulo 2

Controlabilidad y observabilidad

En este capítulo presentamos algunas definiciones de la teoría de controlabilidad para las ecuaciones diferenciales parciales, así como la controlabilidad de la ecuación de onda y la ecuación de calor.

2.1. Problema de control interno

Dado un conjunto abierto $\omega \in \Omega$ con frontera suave $\Gamma = \partial\Omega$, y un conjunto de condiciones de frontera, escrito en forma simplicada $B(D)z = 0$, consideremos el problema de control

$$\begin{aligned} P(D)z &= \chi_\omega f \qquad t > 0, \quad x \in \Omega \\ B(D)z &= 0 \qquad\quad t > 0, \quad x \in \Gamma \\ z\,(0, x) &= z_0\,(x) \qquad x \in \Omega \end{aligned}$$

aquí, $f = f(t, x)$ es el control interno, $z = z(t, x)$ es la función solución (desconocida). Para el problema de controlabilidad, dado z_0 y z_1 en algún espacio funcional H, buscamos un control $f \in L^2\,(0, T\,; U)$ (U es otro espacio funcional) de modo que la solución z del sistema satisfaga $z\,(T, x) = z_1\,(x)$.

2.2. Problema de control en la frontera

Dado algún conjunto abierto $\gamma \subset \Gamma = \partial\Omega$ y dos conjuntos con condiciones de frontera $B_1(D)z = \chi_\gamma f$, $B_2(D)z = 0$ consideremos el problema de control

$$\begin{aligned}
P(D)z &= 0 && t > 0, \quad x \in \Omega \\
B_1(D)z &= \chi_\gamma f && t > 0, \quad x \in \Gamma \\
B_2(D)z &= 0 && t > 0, \quad x \in \Gamma \\
z\left(0, x\right) &= z_0\left(x\right) && x \in \Omega
\end{aligned}$$

aquí $f = f(t, x)$ es el control en la frontera.

En general ω (respectivamente γ) es un subconjunto estricto de Ω (respectivamente Γ).

Ejemplo 2.1 ***Ecuación de calor unidimensional (1-D)***

Veamos el control clásico de la temperatura de una barra. La temperatura se mantiene constante en un extremo ($x = 0$) *mientras que el flujo de calor es controlado en el otro extremo* ($x = L$)*. El sistema*

$$z_t - z_{xx} = 0 \qquad t \in \left(0, T\right), \ x \in \left(0, L\right) \tag{2.1}$$

$$z_t\left(t, L\right) = h\left(t\right) \qquad t \in \left(0, T\right) \tag{2.2}$$

$$z\left(t, 0\right) = 0 \qquad t \in \left(0, T\right) \tag{2.3}$$

$$z\left(0, x\right) = z_0\left(x\right) \qquad x \in \left(0, L\right) \tag{2.4}$$

este es un problema de controlabilidad en la frontera con dominio $\Omega = (0, L)$*. Podemos considerar el siguiente problema de control interno en el dominio* $\Omega' = (0, L')$ *con* $L' > L$

$$y_t - y_{xx} = \chi_{(L,L')} f \qquad t \in \left(0, T\right), \ x \in \left(0, L'\right) \tag{2.5}$$

$$y\left(t, 0\right) = y\left(t, L'\right) = 0 \quad t \in \left(0, T\right) \tag{2.6}$$

$$y\left(0, x\right) = z_0\left(x\right) \quad x \in \left(0, L'\right) \tag{2.7}$$

z_0 *se extiende a* 0 *en* (L, L')*. Entonces, veremos que podemos diseñar una entrada de control para* $f \in L^2\left(0, T; L^2\left(L, L'\right)\right)$ *dirigiendo la solución "*y*" de (2.5)-(2.7) a* 0 *en un tiempo* T*. Para* $z_0 \in H_0^1\left(0, L'\right)$ *y* f *es como antes,* $y \in L^2\left(0, T; H^2\left(0, L'\right)\right)$ *por lo* *tanto* $y_x(\cdot, L) \in L^2(0,T)$*. Tomando* $h(t) = y_x(t,L)$ *en (2.1)-(2.4) resulta de nuevo en* $z(T,\cdot) \equiv 0$*.*

Desarrollaremos una teoría general para sistemas de control asumiendo la forma de control clásica.

$$\sum\nolimits_{A,B} : \ \dot{z} = Az + Bu \tag{2.8}$$

donde $A : D(A) \subset H \to H$ es un operador no acotado que incorpora el operador diferencial junto con las condiciones de frontera homogéneas, y $B : U \to H$ es un operador acotado (es decir, $B \in L(U,H)$) representando el efecto del control u, con H y U denotando espacios de funciones de Hilbert apropiadamente (real o complejo). Asumiremos que en todo A se genera un semigrupo de operadores fuertemente continuo en H, denotado por $(S(t))_{t\geq 0}$ (o $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ en algunos lugares). Este ajuste es conveniente para representar cualquier problema de control interno (lineal).

Ejemplo 2.2 *El control interno de la ecuación de calor puede escribirse* $\dot{z} = Az + Bu$*, con* $H = L^2(0,L')$*,* $U = L^2(L,L')$*,* $Az := z_{xx}$ *,* $D(A) := H^2(0,L') \cap H_0^1(0,L')$*,- * $Bu = \chi_{(L,L')}u$ *(es decir,* Bu *es la extensión de* u *por* 0 *fuera de* (L,L')*).*

2.3. Conceptos de controlabilidad

Dado $z_0 \in H$, y $u \in L^2(0,T;U)$; consideramos la solución $z : [0,T] \to H$ del problema de Cauchy:

$$\sum\nolimits_{A,B} : \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Recordemos que para cualquier $z_0 \in D(A)$ y $u \in W^{1,1}([0,T];U)$ el problema de Cauchy en (2.9) admite una solución clásica única $z \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];H)$ dada por la fórmula de Duhamel

$$z(t) = S(t)z_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)\,ds, \text{ para todo } t \in [0,T]$$

para $z_0 \in H$ y $u \in L^1(0,T;U)$ la fórmula anterior sigue siendo significativa y define una solución suave (mild solution) de (2.9).

Definición 2.1 *Sea*

- $\sum_{A,B}$ *es exactamente controlable en el tiempo* T *si para cualquier* $z_0, z_T \in H$, *existe* $u \in L^2(0,T;U)$ *tal que la solución* z *de (2.9) cumple* $z(T) = z_T$.

- $\sum_{A,B}$ *es nulamente controlable en el tiempo* T *si para cualquier* $z_0 \in H$, *existe-* $u \in L^2(0,T;U)$ *tal que la solución* z *de (2.9) cumple* $z(T) = 0$.

- $\sum_{A,B}$ *es aproximadamente controlable en el tiempo* T *si para cualquier* $z_0, z_T \in H$ *y cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe* $u \in L^2(0,T;U)$ *tal que la solución* z *de (2.9) cumple* $\|z(T) - z_T\|_H < \varepsilon$.

Si la controlabilidad exacta se cumple para cualquier tiempo T, diremos que $\sum_{A,B}$ es exactamente controlable.

Proposición 2.1 *Si* A *genera un grupo continuo* $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *entonces: la controlabilidad es exacta en el tiempo* T *si y solo si la controlabilidad es cero en el tiempo* T.

Demostración. ($\Rightarrow$) Para z_0 , $z_T \in H$, con $z_T = 0$ y existe $u \in L^2(0,T;U)$ tal que la solución z cumple $z(T) = z_T = 0$

($\Leftarrow$) Podemos suponer que $z_0 = 0$ (un control que conduce 0 a $z_T - S(T) z_0$ también conduce z_0 a z_T). Para cualquier $z_T \in H$, existe un control u dirigiendo $S(-T) z_0$ a 0, es decir,

$$0 = S(T)(S(-T) z_T) + \int_0^T S(T-s) Bu(s) ds$$

lo cual resulta, por la propiedad de semigrupos,

$$\begin{aligned} 0 &= z_T + \int_0^T S(T-s) Bu(s) ds \\ z_T &= -\int_0^T S(T-s) Bu(s) ds \\ z_T &= \int_0^T S(T-s)[-Bu(s)] ds \end{aligned}$$

luego

$$z_T = \int_0^T S(T-s) B(u(-s)) ds$$

así z_T es sobreyectivo.

De lo cual se deduce que $\sum_{A,B}$ es exactamente controlable en el tiempo T. ∎

Observación 2.1 *La proposición anterior 2.1 se aplica a la ecuación de onda y a la ecuación de placa sin amortiguación, no a la ecuación de calor.*

2.4. Operadores adjuntos

El adjunto del operador acotado $B \in L(U; H)$ es el operador $B^* \in L(H, U)$, definido por $(B^*z, u)_U = (z, Bu)_H$ para todo $z \in H$, $u \in U$.

Ejemplo 2.3 *Sean*

1) *Si* $Bu = \chi_\omega u$ *con* $\omega \subset \Omega$ *y* $U = L^2(\omega)$, $H = L^2(\Omega)$, *es decir,*

$$(B^*z, u) = (z, Bu)_H = (z, au)_H = (az, u) = (Bz, u)$$

entonces $B^*z = z\,|_\omega$.

2) *Si* $Bu = au$, *con* $a \in L^\infty(\Omega)$ *y* $H = U = L^2(\Omega)$, *entonces* $B^* = B$.

El adjunto del operador A (no acotado) es el operador no acotado A^* con dominio

$$D(A^*) = \left\{ z \in H \mid \text{existe } c \in \mathbb{R}^+,\ |(Ay, z)_H| \leq C \|y\|_H \text{, para todo } y \in D(A) \right\}$$

y definido por:

$$(Ay, z)_H = (y, A^*z)_H \text{, para todo } y \in D(A),\ z \in D(A^*)$$

A^* también genera un semigrupo continuo $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ cumpliendo $e^{tA} = S^*(t)$, $\forall t \geq 0$. Si $A^* = A$ (respectivamente $A^* = -A$) se dice que el operador A es auto adjunto.

2.5. Propiedad de observabilidad

La propiedad de controlabilidad exacta está estrechamente relacionada con una desigualdad para el sistema homogéneo adjunto correspondiente. Esta es la llamada desigualdad de observación u observabilidad. Presentamos esta noción y mostramos su relación con la propiedad de controlabilidad exacta.

Sea A^* la matriz adjunta de A, es decir, la matriz con la propiedad que -
$\langle Az, y\rangle = \langle z, A^*y\rangle$ para todo $z, y \in \mathbb{R}^n$. Considere el siguiente sistema adjunto homogéneo de (2.9)

$$\begin{cases} -\dot{y} = A^*y, \quad t \in (0, T) \\ \qquad y(T) = y_T \end{cases} \tag{2.10}$$

Observe que, para cada $y_T \in \mathbb{R}$, (2.10) puede resolverse hacia atrás en el tiempo y tiene una única solución $y \in C^{\omega}([0,T], \mathbb{R}^n)$ (el espacio de funciones analíticas definido en $[0,T]$ y con valores en $\mathbb{R}^n$).

En primer lugar, deducimos una condición equivalente para la propiedad de controlabilidad exacta.

Lema 2.1 *Sea $z_0 \in \mathbb{R}^n$ una condición inicial de (2.9) se dirige a cero en el tiempo T usando un control $u \in L^2(0,T)$ si y solo si*

$$\int_0^T \langle u, B^* y \rangle + \langle z_0, y(0) \rangle = 0 \tag{2.11}$$

para cualquier $y_T \in \mathbb{R}^n$, siendo y la solución correspondiente de (2.10).

Demostración. Sea y_T arbitrario en $\mathbb{R}^n$ y sea y la solución correspondiente de (2.10). Al multiplicar (2.9) por y y (2.10) por z deducimos que

$$\left\langle \dot{z}, y \right\rangle = \langle Az, y \rangle + \langle Bu, y \rangle; \quad -\left\langle z, \dot{y} \right\rangle = \langle A^* y, z \rangle$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \langle z, y \rangle = \langle Bu, y \rangle$$

el cual, después de la integración en el tiempo, da

$$\langle z(T), y_T \rangle - \langle z_0, y(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu, y \rangle \, dt = \int_0^T \langle u, B^* y \rangle \, dt \tag{2.12}$$

Obtenemos que $z(T) = 0$ si y solo si (2.11) se verifica para cualquier $y_T \in \mathbb{R}^n$. ■

Podemos ver qué (2.11) es una condición de optimización para los puntos críticos de la función cuadrática $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$J(y_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* y|^2 \, dt + \langle z_0, y(0) \rangle$$

donde y es la solución del sistema adjunto (2.10) con condición inicial y_T en el tiempo $t = T$.

Para ser más precisos, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.2 *Suponga que J tiene un minimizador $\widehat{y}_T \in \mathbb{R}^n$ y sea $\widehat{y}$ la solución del sistema adjunto (2.10) con condición inicial $\widehat{y}_T$. Entonces*

$$u = B^* \widehat{y} \tag{2.13}$$

es un control del sistema (2.9) con condición inicial z_0.

Demostración. Si $\widehat{y}_T$ es un punto donde J alcanza su valor mínimo, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{J\left(\widehat{y}_T + h y_T\right) - J\left(\widehat{y}_T\right)}{h} = 0, \text{ para todo } y_T \in \mathbb{R}^n$$

pero

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}\int_0^T \left|B^*\left(\widehat{y} + hy\right)\right|^2 dt + \left\langle z_0, \widehat{y}(0) + hy(0)\right\rangle\right] - \left[\frac{1}{2}\int_0^T \left|B^*\widehat{y}\right|^2 dt + \left\langle z_0, \widehat{y}(0)\right\rangle\right]}{h} \\
0 &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}\int_0^T \left|B^*\widehat{y} + hB^*y\right|^2 dt + \left\langle z_0, \widehat{y}(0)\right\rangle + \left\langle z_0, hy(0)\right\rangle\right] - \left[\frac{1}{2}\int_0^T \left|B^*\widehat{y}\right|^2 dt + \left\langle z_0, \widehat{y}(0)\right\rangle\right]}{h} \\
0 &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}\int_0^T \left|B^*\widehat{y}\right|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T 2\left\langle B^*\widehat{y}, hB^*y\right\rangle dt + \left\langle z_0, hy(0)\right\rangle\right] - \left[\frac{1}{2}\int_0^T \left|B^*\widehat{y}\right|^2 dt\right]}{h} \\
0 &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\int_0^T \left\langle B^*\widehat{y}, hB^*y\right\rangle dt + \left\langle z_0, hy(0)\right\rangle\right]}{h} \\
0 &= \lim_{h \to 0} \left[\int_0^T \left\langle B^*\widehat{y}, B^*y\right\rangle dt + \left\langle z_0, y(0)\right\rangle\right]
\end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\int_0^T \left\langle B^*\widehat{y}, B^*y\right\rangle dt + \left\langle z_0, y(0)\right\rangle = 0, \quad \text{para todo } y_T \in \mathbb{R}^n$$

que, en vista del Lema 2.1, implica que $u = B^*\widehat{y}$ es un control para (2.9). ■

Observación 2.2 *El Lema 2.2 proporciona un método variacional para obtener el control como un mínimo del funcional J. Este no es el único funcional posible que permite construir el control. Modificándolo convenientemente, se pueden obtener otros tipos de controles. Observe que los controles que encontramos son de la forma B^*y, siendo y una solución del problema adjunto homogéneo (2.10). Por lo tanto, son funciones analíticas del tiempo.*

La siguiente noción desempeñará un papel fundamental en la resolución de los problemas de control.

Definición 2.2 *Se dice que el sistema (2.10) es observable en el tiempo $T > 0$ si existe $c > 0$ de modo que*

$$\int_0^T |B^* y|^2 \, dt \geq c \, |y(0)|^2 \tag{2.14}$$

para todos los $y_T \in \mathbb{R}^n$, siendo y la solución correspondiente de (2.10).

La desigualdad (2.14) se llamará la desigualdad de observación u observabilidad. Esta desigualdad garantiza que la solución del problema adjunto en $t = 0$ está determinada únicamente por la cantidad observada $B^* y(t)$ para $0 < t < T$. En otras palabras, la información contenida en este término caracteriza completamente la solución de (2.10).

Observación 2.3 *La desigualdad de observación (2.14) es equivalente a la siguiente: existe $c > 0$ tal que:*

$$\int_0^T |B^* y|^2 \, dt \geq c \, |y_T|^2 \tag{2.15}$$

para todo $y_T \in \mathbb{R}^n$, siendo y la solución correspondiente de (2.10).

Asì, la equivalencia se deduce del hecho de que la aplicación a la cual se asocia cada $y_T \in \mathbb{R}^n$ el vector $y(0) \in \mathbb{R}^n$, es una transformación lineal acotada en $\mathbb{R}^n$ con inversa acotada. Usaremos las formas (2.14) o (2.15) de la desigualdad de observación dependiendo de las necesidades de cada problema particular que trataremos.

Proposición 2.2 *La Desigualdad (2.14) es equivalente al siguiente principio de continuidad única*

$$B^* y(t) = 0, \text{ para todo } t \in [0, T] \text{ entonces } y_T = 0 \tag{2.16}$$

Demostración. Una de las implicaciones se deduce inmediatamente de (2.15). Para el otro, definamos la semi-norma en $\mathbb{R}^n$

$$|y_T|_* = \left[\int_0^T |B^* y|^2 \, dt \right]^{1/2}$$

Claramente $|\cdot|_*$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ si y solo si (2.16) se cumple.

Como todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, se deduce que (2.16) es equivalente a (2.15). La prueba finaliza teniendo en cuenta la observación anterior 2.3. ■

Observación 2.4 *Observemos que (2.14) y (2.16) ya no serán propiedades equivalentes en espacios de dimensiones infinitas. Darán lugar a diferentes nociones de controlabilidad (exactas y aproximadas, respectivamente).*

La importancia de la desigualdad de observación se basa en el hecho de que implica el control exacto de (2.9). De esta manera, la propiedad de controlabilidad se reduce al estudio de una desigualdad para el sistema homogéneo (2.10) el cual, al menos conceptualmente, es un problema más simple. Analicemos ahora la relación entre las propiedades de controlabilidad y observabilidad.

Teorema 2.1 *El sistema (2.9) es exactamente controlable en el tiempo T si y solo si (2.10) es observable en el tiempo T.*

Demostración. ($\Leftarrow$)Probemos primero que la observabilidad implica controlabilidad. De acuerdo con el Lema 2.2, la propiedad de controlabilidad exacta en el tiempo T si se cumple para cualquier $z_0 \in \mathbb{R}^n$, J tiene un mínimo. Observamos que J es continuo. En consecuencia, la existencia de un mínimo está asegurada si J también es coercivo, es decir,

$$\lim_{|\varphi_T| \to \infty} J(y_T) = \infty \tag{2.17}$$

La propiedad de coercitividad (2.17) es una consecuencia de la propiedad de observación en el tiempo T. De hecho, de (2.14) obtenemos que

$$J(y_T) \geq \frac{c}{2} |y_T|^2 - |\langle z_0, y(0) \rangle|$$

El lado derecho tiende al infinito cuando $|y_T| \to \infty$, y J satisface (2.17).

($\Rightarrow$)Recíprocamente, suponga que el sistema (2.9) es exactamente controlable en el tiempo T. Si (2.10) no es observable en el tiempo T, existe una sucesión $\left(y_T^k\right)_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\left|y_T^k\right| = 1$ para todos los $k \geq 1$ y

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T \left|B^* y^k\right|^2 dt = 0 \tag{2.18}$$

Se deduce que existe una subsucesión de $\left(y_T^k\right)_{k \geq 1}$, denotada de la misma manera, que converge a $y_T \in \mathbb{R}^n$ y $|y_T| = 1$. Además, si y es la solución de (2.10) con el dato inicial y_T, de (2.18) se deduce que

$$\int_0^T |B^* y|^2 dt = 0 \tag{2.19}$$

como (2.9) es controlable, el lema 2.1 da que, para cualquier condición inicial $z_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^2(0,T)$ tal que

$$\int_0^T \langle u, B^* y_k \rangle \, dt = - \langle z_0, y_k(0) \rangle \text{, para todo } k \geq 1 \tag{2.20}$$

al pasar al límite en (2.20) y al tener en cuenta (2.19), obtenemos que $\langle z_0, y(0) \rangle = 0$. Dado que z_0 es arbitrario en $\mathbb{R}^n$, se deduce que $y(0) = 0$ y, en consecuencia, $y_T = 0$. Esto está en contradicción con el hecho de que $|y_T| = 1$.

La prueba del teorema ahora está completa. ■

Observación 2.5 *La utilidad del Teorema 2.1 consiste en el hecho de que reduce la prueba de la controlabilidad exacta para el estudio de la desigualdad de observación.*

Las pruebas de los teoremas 2.2 y 2.3 son clásicas, y se pueden encontrar, por ejemplo, en zabczyk (1992).

Teorema 2.2 *El sistema $\sum_{A,B}$ es nulamente controlable en el tiempo $T > 0$ si y solo si existe una constante $c > 0$ talque*

$$\int_0^T \| B^* S^* (t) \, y_0 \|_U^2 \, dt \geq c \, \| S^* (T) \, y_0 \|_H^2 \text{, para todo } y_0 \in H \tag{2.21}$$

(2.21) es una desigualdad de observabilidad débil: solo se puede recuperar $S^*(T) \, y_0$, no y_0.

Demostración. Véase zabczyk (1992). ■

Teorema 2.3 *El sistema $\sum_{A,B}$ es aproximadamente controlable en el tiempo $T > 0$ si y solo si el único $y_0 \in H$ para lo cual*

$$B^* S^* (t) \, y_0 = 0, \text{ para todo } t \in [0,T] \tag{2.22}$$

es $y_0 = 0$.

(2.22) se denomina propiedad de continuación única (UCP).

Demostración. Véase zabczyk (1992). ■

De los teoremas anteriores 2.2 y 2.3 se deduce que un sistema $\sum_{A,B}$ que es nulamente controlable para cualquier $T > 0$ también es aproximadamente controlable para cualquier $T > 0$.

2.6. Controlabilidad aproximada

Introducimos algunas notaciones importantes. Si $x_1, \ldots, x_N$ denotan variables independientes en $\mathbb{R}^N$, sea $\partial_j = \partial/\partial x_j$, y $D_j = -i\partial_j$ (donde $\partial_j = iD_j$) para $j = 1, \ldots, N$. Para cualquier función polinomial $P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ (los coeficientes a_α son analíticos en x), establecemos $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ donde $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_N^{\alpha_N}$. P se denomina el símbolo del operador $P(x,D)$. El símbolo principal de $P(x,D)$ se define como $P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$. Notamos que $\xi_1, \ldots, \xi_N$ son las variables de Fourier asociadas con $x_1, \ldots, x_N$, respectivamente.

En esta sección veremos la controlabilidad aproximada de los sistemas con un control interno, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \chi_\omega u && (2.23)\\ z(0) &= z_0 && (2.24) \end{aligned}$$

ω denota un subconjunto abierto de Ω, y supondremos que tanto ω como Ω son convexos. Según el teorema 2.3, la controlabilidad aproximada de (2.23) es equivalente a la propiedad de continuación única para la ecuación adjunta; es decir, para cualquier solución y de la ecuación adjunta $\dot{y} = -A^*y$

$$y \equiv 0 \quad \text{en} \quad (0,T)\times\omega \Rightarrow y \equiv 0 \quad \text{en} \quad (0,T)\times\Omega. \qquad (2.25)$$

Dicha propiedad a menudo se obtiene como un subproducto de alguna estimación de Carleman (estas estimativas se encuentran en Fernandez Cara (2006)), cuando el operador A incorpora coeficientes variables. La situación es mas simple cuando el operador diferencial solo tiene coeficientes constantes.

Un resultado clásico que da la propiedad de continuidad única (UCP) para una ecuación diferencial parcial (PDE) con coeficientes analíticos es el Teorema de la unicidad de Holmgren.

Teorema 2.4 *(Teorema de unicidad de Holmgren) Si $u \in D'(\Omega)$ es una solución de una ecuación diferencial $P(x,D)u = 0$ con coeficientes analíticos. Si $u = 0$ en un lado de la superficie C^1 se debe anular en una vecindad de cualquier punto no característico.*

Demostración. Véase Hörmander (2003), teor. 8.6.5. ∎

El siguiente teorema de unicidad de Holmgren proporciona una caracterización útil de la propiedad de continuidad única (UCP) para un operador diferencial con coeficientes constantes.

Teorema 2.5 *Sea $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ un operador diferencial con coeficientes constantes, y sean Ω_1 y Ω_2 dos conjuntos abiertos convexos en $\mathbb{R}^N$, con $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1) *(UCP) Cada $u \in D'(\Omega_2)$ que satisface $P(D)u = 0$ en Ω_2 y se anula en Ω_1 también debe anularse en Ω_2.*

2) *Para cada hiperplano característico $P(D)$ el cual se interseca con Ω_2 también se interseca con Ω_1.*

Demostración. Véase en Hörmander (2003), teor. 8.6.8. ■

Capítulo 3

Controlabilidad de la ecuación de onda y de calor

3.1. Ecuación de onda

Investigaremos la controlabilidad de los límites de la ecuación de onda unidimensional (1-D),

$$
\begin{aligned}
z_{tt} - z_{xx} &= 0 \qquad 0 < t < T \ ; \ \ 0 < x < \pi && (3.1)\\
z(t,0) &= 0 \qquad 0 < t < T && (3.2)\\
z(t,\pi) &= h(t) \qquad 0 < t < T && (3.3)\\
(z(0,\cdot), z_t(0,\cdot)) &= (z_0, z_1) && (3.4)
\end{aligned}
$$

donde $h \in L^2(0,T)$ es el control y (z_0, z_1) representan las condiciones iniciales (la longitud del dominio espacial es π para simplificar los cálculos con series de Fourier). Probaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *El sistema (3.1)-(3.4) es exactamente controlable en $L^2(0,\pi) \times H^{-1}(0,\pi)$ en el tiempo T si y solo si $T \geq 2\pi$.*

Demostración. El problema descontrolado

$$
\begin{aligned}
z_{tt} - z_{xx} &= 0 \qquad 0 < t < T \ ; \ \ 0 < x < \pi && (3.5)\\
z(t,0) &= z(t,\pi) = 0 \qquad 0 < t < T && (3.6)\\
(z(0,\cdot), z_t(0,\cdot)) &= (z_0, z_1) && (3.7)
\end{aligned}
$$

puede escribirse $(z, z_t)_t = A(z, z_t)$ con $A(z_0, z_1) = (z_1, (z_0)_{xx})$ en el dominio $D(A) = (H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)) \times H_0^1(0,\pi) \subset H := H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$.

Calculamos la solución de la ecuación (3.5), que tiene la siguiente forma

$$z(t,x) = T(t)\,X(x) \tag{3.8}$$

por separación de variables, tenemos

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda T(t) &= 0 && (3.9)\\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0 && (3.10)\end{aligned}$$

luego reemplazamos (3.8) en las condiciones de frontera, así tenemos

$$\begin{aligned} z(t,0) &= T(t)\,X(0) = 0\\ z(t,\pi) &= T(t)\,X(\pi) = 0\end{aligned}$$

como $T(t) \neq 0$ se deduce que $X(x)$ debe satisfacer las condiciones de frontera

$$X(0) = 0,\ X(\pi) = 0 \tag{3.11}$$

luego la ecuación (3.10) tiene solución trivial $X(x) \equiv 0$ con las condiciones dadas en (3.11) las soluciones no triviales de $z(t,x)$ de (3.8) debemos obtener los valores que toma el parámetro λ.

Si $\lambda > 0$ la solución general de la ecuación (3.10) será

$$X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

haciendo cumplir las condiciones en (3.11) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= X(0) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}0\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\lambda}0\right) && (3.12)\\ 0 &= c_1\end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
0 &= X(\pi) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) \qquad (3.13)\\
0 &= c_2 sen\left(\sqrt{\lambda}\pi\right)
\end{aligned}
$$

si $c_2 = 0$ tenemos la solución trivial. Luego, si $c_2 \neq 0$ entonces tiene solución no trivial,

$$sen\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0$$

donde

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\lambda}\pi &= \arcsin(0)\\
\sqrt{\lambda}\pi &= k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\\
\lambda &= k^2
\end{aligned}
$$

luego las soluciones no triviales de (3.10), (3.11) son posibles para los valores $\lambda_k = k^2$. De la ecuación (3.12) tenemos que $c_1 = 0$, luego

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\lambda}\pi &= \arcsin(0)\\
\sqrt{\lambda}\pi &= k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\\
\lambda &= k^2
\end{aligned}
$$

luego las soluciones no triviales de (3.10), (3.11) son posibles para los valores $\lambda_k = k^2$. De la ecuación (3.12) tenemos que $c_1 = 0$, luego

$$X_k(x) = c_2 sen(kx)$$

si tomamos $c_2 = 1$, obtenemos

$$X_k(x) = sen(kx)$$

De la misma forma obtenemos la solución de la ecuación (3.9), para $\lambda > 0$ la solución general de la ecuación (3.9) será

$$T_k(t) = a_k \cos(kt) + c_k sen(kt)$$

donde

$$z_k(t,x) = [a_k \cos(kt) + c_k sen(kt)]\, sen(kx)$$

entonces la solución general es de la forma

$$z(t,x) = \sum_{k\geq 1} [a_k \cos(kt) + c_k sen(kt)]\, sen(kx) \tag{3.14}$$

luego para $t = 0$

$$\begin{aligned} z(0,x) &= \sum_{k\geq 1} [a_k \cos(k0) + c_k sen(k0)]\, sen(kx) \\ z_0 &= z(0,x) = \sum_{k\geq 1} a_k sen(kx) \end{aligned}$$

derivando (3.14) y evaluando en $t = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} z_t(t,x) &= \sum_{k\geq 1} [-ka_k sen(kt) + kc_k \cos(kt)]\, sen(kx) \\ z_1 &= z_t(0,x) = \sum_{k\geq 1} kc_k sen(kx) \end{aligned}$$

así vemos que $z_0 = \sum_{k\geq 1} a_k sen(kx)$ y $z_1 = \sum_{k\geq 1} b_k sen(kx)$ donde $b_k = kc_k$, entonces la solución z de (3.5)-(3.7) se puede escribir

$$z(t,x) = \sum_{k\geq 1} [a_k \cos(kt) + b_k sen(kt)]\, sen(kx) \tag{3.15}$$

luego, se puede probar que A genera un grupo de isométrias en cada espacio $H^{\alpha} \times H^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ donde

$$H^{\alpha} := \left\{ z(x) = \sum_{k\geq 1} a_k sen(kx) \,/ \sum_{k\geq 1} |k^{\alpha} a_k|^2 < \infty \right\}$$

está dotado de su norma natural.

Para identificar el problema adjunto y B^*, multiplicamos (3.1) por y, e integramos sobre $(0,T)\times(0,\pi)$ y realizamos integración por partes, asumiendo que las funciones y e z son suficientemente regulares. Obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T\int_0^\pi (z_{tt}-z_{xx})\, ydxdt \\ 0 &= \int_0^T\int_0^\pi z_{tt}ydxdt - \int_0^T\int_0^\pi z_{xx}ydxdt \end{aligned}$$

aplicaremos integración por partes a cada integral por separado, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_0^\pi z_{tt}ydxdt &= \int_0^\pi\left[\int_0^T z_{tt}ydt\right]dx = \int_0^\pi\left[yz_t\mid_0^T - \int_0^T z_ty_tdt\right]dx \\ &= \int_0^\pi yz_t\mid_0^T dx - \int_0^\pi\left[\int_0^T z_ty_tdt\right]dx \\ &= \int_0^\pi yz_t\mid_0^T dx - \int_0^\pi\left[zy_t\mid_0^T - \int_0^T zy_{tt}dt\right]dx \\ &= \int_0^\pi yz_t\mid_0^T dx - \int_0^\pi zy_t\mid_0^T dx + \int_0^\pi\int_0^T zy_{tt}dtdx \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_0^\pi z_{xx}ydxdt &= \int_0^T\left[yz_x\mid_0^\pi - \int_0^\pi z_xy_xdx\right]dt = \int_0^T yz_x\mid_0^\pi dt - \int_0^T\left[\int_0^\pi z_xy_xdx\right]dt \\ &= \int_0^T yz_x\mid_0^\pi dt - \int_0^T\left[zy_x\mid_0^\pi - \int_0^\pi zy_{xx}dx\right]dt \\ &= \int_0^T yz_x\mid_0^\pi dt - \int_0^T zy_x\mid_0^\pi dt + \int_0^T\int_0^\pi zy_{xx}dxdt \end{aligned}$$

luego, reemplazando en la ecuacion inicial tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T\int_0^\pi z_{tt}ydxdt - \int_0^T\int_0^\pi z_{xx}ydxdt \\ &= \int_0^\pi yz_t\mid_0^T dx - \int_0^\pi zy_t\mid_0^T dx + \int_0^\pi\int_0^T zy_{tt}dtdx \\ -\int_0^T yz_x &\mid {}_0^\pi dt + \int_0^T zy_x\mid_0^\pi dt - \int_0^T\int_0^\pi zy_{xx}dxdt \\ &= \int_0^\pi [yz_t - zy_t]_0^T dx + \int_0^T [zy_x - yz_x]_0^\pi dt + \int_0^\pi\int_0^T z\,(y_{tt}-y_{xx})\, dtdx \end{aligned}$$

si y es una solución de (3.5)-(3.7), y $\int_0^\pi \int_0^T z\left(y_{tt}-y_{xx}\right) dtdx=0$ entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\pi \left[yz_t - zy_t\right]_0^T dx + \int_0^T \left[zy_x - yz_x\right]_0^\pi dt \\
0 &= \int_0^\pi \left[yz_t - zy_t\right]_0^T dx + \int_0^T zy_x \mid_0^\pi dt - \int_0^T yz_x \mid_0^\pi dt \\
0 &= \int_0^\pi \left[yz_t - zy_t\right]_0^T dx + \int_0^T \left(z\left(t,\pi\right) y_x\left(t,\pi\right) - z\left(t,0\right) y_x\left(t,0\right)\right) dt - \int_0^T yz_x \mid_0^\pi dt \\
0 &= \int_0^\pi \left[yz_t - zy_t\right]_0^T dx + \int_0^T z\left(t,\pi\right) y_x\left(t,\pi\right) dt \\
0 &= \int_0^\pi \left[yz_t - zy_t\right]_0^T dx + \int_0^T h\left(t\right) y_x\left(t,\pi\right) dt
\end{aligned}$$

luego

$$-\int_0^T h\left(t\right) y_x\left(t,\pi\right) dt = \left[\int_0^\pi \left(z_t y - zy_t\right) dx\right]_0^T \tag{3.16}$$

así

$$\begin{aligned}
& -\int_0^T h\left(t\right) y_x\left(t,\pi\right) dt \\
&= \left[\int_0^\pi \left(z_t y - zy_t\right) dx\right]_0^T \\
&= \int_0^\pi \left[\left(z_t\left(T,x\right) y\left(T,x\right) - z\left(T,x\right) y_t\left(T,x\right)\right) - \left(z_t\left(0,x\right) y\left(0,x\right) - z\left(0,x\right) y_t\left(0,x\right)\right)\right] dx
\end{aligned}$$

donde tenemos el problema adjunto

$$\begin{aligned}
y_{tt} - y_{xx} &= 0,\ t \in \left(0,T\right),\ x \in \left(0,\pi\right) \qquad (3.17)\\
y\left(0,x\right) &= y_0\left(x\right) \\
y_t\left(0,x\right) &= y_1\left(x\right)
\end{aligned}$$

de forma similar calculamos la solución de la ecuación (3.17).

Donde $y_{0,T} = \sum\limits_{k\geq 1} c_k sen\left(kx\right)$; $y_{1,T} = \sum\limits_{k\geq 1} d_k sen\left(kx\right)$, entonces

$$y\left(t,x\right) = \sum_{k\geq 1}\left[c_k \cos\left(k\left(t-T\right)\right) + \frac{d_k}{k} sen\left(k\left(t-T\right)\right)\right] sen\left(kx\right)$$

así

$$y_x\left(t,\pi\right) = \sum_{k\geq 1}\left[kc_k \cos\left(k\left(t-T\right)\right) + d_k sen\left(k\left(t-T\right)\right)\right]\left(-1\right)^k \tag{3.18}$$

si $T = 2\pi$, entonces por las propiedades de ortogonalidad de las funciones $sen\,(kt)$ y $\cos(kt)$ en $L^2(0, 2\pi)$, vemos que

$$\int_0^{2\pi} |y_x(\cdot,\pi)|^2\, dt = \pi \sum_{k\geq 1} \left(|b_k|^2 + |d_k|^2\right) < \infty \tag{3.19}$$

se deduce que $y_x(\cdot,\pi) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, por lo tanto, el término integral en (3.16) es significativo.

Pero sabemos que $z(0,\cdot) = z_0$ y $z_t(0,\cdot) = z_1$ además $y(0,\cdot) = y_0$ y $y_t(0,\cdot) = y_1$ reemplazando en la ecuación (3.16), tenemos

$$-\int_0^T h(t)\, y_x(t,\pi)\, dt = \int_0^\pi \left[(z_t(T,x)\, y(T,x) - z(T,x)\, y_t(T,x)) - (z_1 y_0 - z_0 y_1)\right] dx$$

asume además que $(y(T,\cdot), y_t(T,\cdot)) = (y_{0,T}, y_{1,T}) \in H$,

$$\begin{aligned} -\int_0^T h(t)\, y_x(t,\pi)\, dt &= \int_0^\pi \left[(z_t(T,x)\, y_{0,T} - z(T,x)\, y_{1,T}) - (z_1 y_0 - z_0 y_1)\right] dx \\ &= \int_0^\pi z_t(T,x)\, y_{0,T} dx - \int_0^\pi z(T,x)\, y_{1,T} dx + \int_0^\pi -z_1 y_0 dx + \int_0^\pi z_0 y_1 dx \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_0^\pi -z_t(T,x)\, y_{0,T} dx + \int_0^\pi z(T,x)\, y_{1,T} dx &= \int_0^T h(t)\, y_x(t,\pi)\, dt + \int_0^\pi -z_1 y_0 dx + \int_0^\pi z_0 y_1 dx \\ \langle -z_t(T,x), y_{0,T}\rangle + \langle z(T,x), y_{1,T}\rangle &= \int_0^T h(t)\, y_x(t,\pi)\, dt + \langle -z_1, y_0\rangle + \langle z_0, y_1\rangle \\ \langle -z_1(T,x), y_{0,T}\rangle + \langle z_0(T,x), y_{1,T}\rangle &= \int_0^T h(t)\, y_x(t,\pi)\, dt + \langle -z_1, y_0\rangle + \langle z_0, y_1\rangle \end{aligned}$$

Definimos una solución de (3.1)-(3.4) usamos el método de transposición. En primer lugar, tenga en cuenta que el dual del espacio H es $H' = H^{-1}(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, y el emparejamiento de dualidad $\langle \cdot,\cdot \rangle_{H',H}$ está definida por:

$$\langle (z_1, z_0), (y_0, y_1) \rangle_{H,H'} = \langle z_1, y_0 \rangle_{H^{-1}(0,\pi), H_0^1(0,\pi)} + \langle z_0, y_1 \rangle_{L^2(0,\pi), L^2(0,\pi)}$$

reemplazando T por cualquier t, (3.16) se puede reescribir como

$$\langle (-z_t(t), z(t)), (y(t), y_t(t)) \rangle_{H,H'} = \int_0^t h(s)\, y_x(s,\pi)\, ds + \langle (-z_1, z_0), (y(0), y_t(0)) \rangle_{H,H'} \tag{3.20}$$

como la aplicación $(y_{0,T}\, y_{1,T}) \in H \to (y\,(t)\,, y_t\,(t)) \in H$ es un isomorfismo del espacio de Hilbert, (3.20) define $(z_t\,(t)\,, z\,(t))$ en H' de mamera única, y $(z_t, z) \in C\,([0,T]\,; H')$, z se denomina solución por transposición de (3.1)-(3.4). Supongamos ahora que
$(z_0, z_1) = (0,0)$. Entonces

$$\langle (-z_t\,(T)\,, z\,(T))\,, (y_{0,T}, y_{1,T})\rangle_{H,H'} = \int_0^T h\,(t)\, y_x\,(t,\pi)\, dt$$

Sea $h\,(t) = y_x\,(t,\pi)$, entonces se ve que (3.1)-(3.4) es exactamente controlable en
$H^{-1}\,(0,\pi) \times L^2\,(0,\pi)$ si y solo si la siguiente desigualdad de observabilidad

$$\int_0^T |y_x\,(t,\pi)|^2\, dt \geq C\, \|(y_{0,T}, y_{1,T})\|_H^2 \tag{3.21}$$

se cumple. Por el teorema de Ingham (teor. 1.11) se cumple para todo $T \geq 2\pi$ cuando $\gamma = \frac{1}{2}$.

Esto completa la prueba del teorema 3.1. ■

3.2. Ecuación de Calor

Ahora nos ocuparemos de las propiedades de controlabilidad de la ecuación de calor. Consideremos el siguiente problema de control interno

$$z_t - z_{xx} + d\,(x)\, z = \chi_{(a,b)} f \tag{3.22}$$

$$z\,(t,0) = z\,(t,L) = 0 \tag{3.23}$$

$$z\,(0,x) = z_0 \tag{3.24}$$

donde $z = z\,(t,x)$ es el estado, $f = f\,(t,x)$ es la entrada de control, y $d = d\,(x)$ es algún potencial. Supongamos que $d \in L^\infty\,(0,L)$, que $f \in L^2\,(0,T;(a,b))$, y que $z_0 \in L^2\,(0,L)$. Aquí, a y b son números dados $0 \leq a < b \leq L$.

Por resultados de regularidad estándar para ecuaciones parabólicas (ver Evans (1998)), la solución z de (3.22)-(3.24) cumple

$$z \in L^2\left(0,T;H_0^1\,(0,L)\right) \cap H^1\left(0,T;H^{-1}\,(0,L)\right)$$

y para cualquier $t_0 \in (0, T)$

$$z \in L^2\left(t_0, T; H^2(0, L)\right) \cap H^1\left(t_0, T; H^{-1}(0, L)\right)$$

En particular, $z \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap C([0, T]; H_0^1(0, L))$. Se deduce que un resultado de controlabilidad exacta no puede mantenerse en $L^2(0, L)$, para $z(T) \in H_0^1(0, L)$. En realidad, si $d = 0$, entonces $z \in C^\infty((0, T) \times (0, a))$ por la hipoelipticidad del operador de calor, por lo tanto, $z(T)$ tiene que ser suave en $(0, a)$ y en $(0, L)$.

Sin embargo, el siguiente resultado puede ser probado.

Teorema 3.2 *El sistema (3.22)-(3.24) es nulamente controlable en $L^2(0, L)$ para cualquier $T > 0$.*

Demostración. El sistema (3.22)-(3.24) se puede poner en la forma $\dot{z} = Az + Bf$, con $Az := d^2z/dx^2 - d(x)z$ en el dominio $D(A) = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ y - $B : f \in L^2(a, b) \to \chi_{(a,b)} f \in L^2(0, L)$ (es decir, Bf es la extensión de f por 0). Donde $A^* = A$, entonces $S^*(t) = S(t)$. De acuerdo con el teorema 2.2 tenemos que verificar que (2.21) es válido, es decir, existe la constante $C > 0$ tal que para cualquier $z_0 \in L^2(0, L)$.

$$\int_0^T \int_a^b |z(t, x)|^2 \, dxdt \geq C \int_0^L |z(T, x)|^2 \, dx \tag{3.25}$$

donde $z(t, x)$ denota la solución de

$$\begin{aligned} z_t - z_{xx} + d(x) z &= 0 & (3.26) \\ z(t, 0) &= z(t, L) = 0 & (3.27) \\ z(0, x) &= z_0 & (3.28) \end{aligned}$$

Por un argumento de densidad, podemos suponer que $z_0 \in D(A) = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, de modo que $z \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L))$. El ingrediente clave es la siguiente estimación de Carleman.

Lema 3.1 *Existen dos números positivos s_0, C_0, y una función $\psi \in C^2([0, L])$ con $\psi(x) > 0$, $\forall x \in [0, L]$ tal que para cualquier*

$z \in L^2(0,T;H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L))\cap H^1(0,T;L^2(0,L))$ y para cualquier $s \geq s_0$ tenemos

$$\int_0^T\int_0^L e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\begin{pmatrix} \frac{t(T-t)}{s}\left(|z_t|^2+|z_{xx}|^2\right)+ \\ \frac{s}{t(T-t)}|z_x|^2+\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|z|^2 \end{pmatrix}dxdt$$

$$\leq\ C_0\begin{pmatrix} \int_0^T\int_0^L e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}|z_t-z_{xx}|^2\,dxdt+ \\ \int_0^T\int_0^b e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|z|^2\,dxdt \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Ver Fernandez-Cara (2006) para una prueba.

Veamos ahora cómo (3.25) se puede deducir de (3.29). Elija cualquier $z_0 \in D(A)$, de modo que la solución $z(t,x)$ de (3.26)-(3.28) cumpla todos los requesitos en el lema 3.1. Escoge también cualquier $s \geq s_0$ tal que

$$\frac{s^3}{t^3(T-t)^3} \geq C_0\|d\|^2_{L^\infty(0,L)}+1 \text{ para todo } t\in(0,T) \tag{3.30}$$

desde $z_t - z_{xx} = -d(x)z$, se deduce de (3.29) que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^L e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|z|^2\,dxdt \\
\leq\ & C_0\left(\int_0^T\int_0^L e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}|d(x)z|^2\,dxdt+\int_0^T\int_0^b e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|z|^2\,dxdt\right) \\
\leq\ & C_0\left(\|d\|^2_{L^\infty(0,L)}\int_0^T\int_0^L e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}|z|^2\,dxdt+\int_0^T\int_0^b e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|z|^2\,dxdt\right)
\end{aligned}$$

utilizando (3.30), obtenemos

$$\int_0^T\int_0^L e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}|z|^2\,dxdt \leq C_0\int_0^T\int_0^b e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|z|^2\,dxdt$$

como $\psi(x) > 0$ en $[0,L]$, podemos encontrar algunas constantes positivas C_1, C_2 tales que:

$$e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}} \geq C_1 \quad \text{para todo } (t,x)\in\left(\frac{T}{3},\frac{2T}{3}\right)\times(0,L)$$

y

$$e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}\frac{s^3}{t^3(T-t)^3}\leq C_2,\text{ para todo }(t,x)\in(0,T)\times(0,L)$$

llegamos a

$$\int_{\frac{T}{3}}^{\frac{2T}{3}}\int_0^L|z|^2\,dxdt\leq\frac{C_0C_2}{C_1}\int_0^T\int_a^b e^{-2s\frac{\psi(x)}{t(T-t)}}|z|^2\,dxdt \tag{3.31}$$

ya que A genera un semigrupo fuertemente continuo $(S(t))_{t\geq 0}$ en $L(0,L)$, podemos escribir para algunas constantes positivas M, μ,

$$\|S(t)\|\leq Me^{\mu t}\text{ para todo }t\geq 0$$

Así, para cualquier $t\in\left(\frac{T}{3},\frac{2T}{3}\right)$

$$\|z(T)\|^2_{L^2(0,L)}=\|S(T-t)\,z(t)\|^2_{L^2(0,L)}\leq M^2e^{2\mu(T-t)}\|z(t)\|^2_{L^2(0,L)}$$

integrando sobre $\left(\frac{T}{3},\frac{2T}{3}\right)$ tenemos

$$\frac{T}{3}\|z(T)\|^2_{L^2(0,L)}\leq M^2e^{4\mu T/3}\int_{\frac{T}{3}}^{\frac{2T}{3}}\|z(t)\|^2_{L^2(0,L)}\,dt \tag{3.32}$$

reuniendo (3.31) y (3.32), obtenemos (3.25). ■

La controlabilidad nula de la ecuación de calor se derivó en Russell (1973) de un resultado de controlabilidad exacta para la ecuación de onda. En particular, la controlabilidad nula de la ecuación de calor se estableció en dimensión uno para cualquier momento T mediante un control de frontera aplicado a ambas extremidades. Más tarde, Èmanuilov (1995) & Lebeau (1995) demostraron independientemente la controlabilidad cero de la ecuación de calor en cualquier dimensión mediante el uso de estimaciones de Carleman. Desde entonces, las estimaciones de Carleman se han utilizado para probar la controlabilidad cero de ciertas ecuaciones de calor similíneales y de las ecuaciones de Navier-Stokes. (Ver Fernández-Cara (2006)).

3.3. Estabilidad

En esta última parte investigamos la estabilidad de un sistema de control

$$\sum_{A,B}: \; \dot{z} = Az + Bu \tag{3.33}$$

donde A genera un semigrupo continuo de operadores $(S(t))_{t\geq 0}$ en algún espacio de Hilbert H, y B es un operador lineal y acotado que actúa de un espacio de Hilbert U a H.

3.3.1. Sistemas de dimensiones finitas

Recordamos algunas propiedades de estabilidad bien conocidas cuando $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Denotamos por $\sigma(A)$ el espectro de A, es decir, el conjunto de sus valores propios.

El origen es asintóticamente estable ($\Longleftrightarrow$ exponencialmente estable) para el sistema $\dot{x} = Ax$ si y solo si $\sigma(A) \subset \mathbb{C}\_ := \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}\ z < 0\}$. Además:

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda/\lambda \in \sigma(A)\} = \inf\left\{\mu \in \mathbb{R}/ \text{ existe } C > 0,\ \left\|e^{tA}\right\| \leq Ce^{\mu t} \text{ para todo } t \geq 0\right\} \tag{3.34}$$

(Teorema de Wonham) El sistema de control $\sum_{A,B}$ es controlable si y solo si es exponencialmente estable con una tasa de decaimiento exponencial arbitraria, es decir,

$$\text{para todo } \mu \in (-\infty, 0)\text{, existen } K \in \mathbb{C}^{N\times N}, C > 0,\ \left\|e^{t(A+BK)}\right\| \leq Ce^{\mu t}, \text{ para todo } t \geq 0$$

3.3.2. Propiedades de estabilidad para sistemas de dimensión infinita.

Supongamos que A es el generador de un semigrupo continuo $(S(t))_{t\geq 0}$ en H.

El conjunto resolvente de A, denotado por $\rho(A)$, es el conjunto de números complejos λ para los cuales el operador $(\lambda I - A)$ es limitadamente invertible (es decir, su inverso $(\lambda I - A)^{-1} : H \to D(A)$ existe y está acotado de H a H). Cuando A es cerrado, una aplicación del teorema del grafico cerrado muestra al mismo tiempo que $\lambda \in \rho(A)$ si y solo si $\lambda I - A : D(A) \to H$ sobre y uno a uno. La aplicación $\lambda \in \rho(A) \longmapsto (\lambda I - A)^{-1} \in L(H, H)$ se denomina el resolvente de A. El espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, es el complemento del conjunto solvente: $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Observación 3.1 *Sea*

1) *Si H es real, es complejizado y A se extiende de forma obvia para definir el resolutor de A.*

2) *λ está en el espectro de A si y solo si $(\lambda I - A)$ no es uno a uno (es decir, λ es un valor propio de A) o $(\lambda I - A)$ no es sobre. Así, el espectro no se reduce al conjunto de valores propios de A en general. (ver ejemplo 3.1)*

Consideremos las siguientes propiedades:

(i) para algunas constantes $C > 0$, $\mu > 0$, y todo $t \geq 0$ $\|S(t)\| \leq Ce^{-\mu t}$;

(ii) para cualquier $z_0 \in H$, $S(t) z_0 \to 0$ exponencialmente cuando $t \to +\infty$;

(iii) para cualquier $z_0 \in H$, $\int_0^{+\infty} \|S(t) z_0\|_H^2 \, dt < \infty$;

(iv) para cualquier $z_0 \in H$, $S(t) z_0 \to 0$ cuando $t \to +\infty$;

(v) $\sup \{\operatorname{Re} \lambda / \lambda \in \sigma(A)\} < 0$.

En dimensión finita, estas propiedades son todas equivalentes. En dimensión infinita, la situación es más complicada. El siguiente resultado, muestra los enlaces entre estas propiedades.

Teorema 3.3 *Sea*

1) *Tenemos (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).*

2) *Solo tenemos (i) $\Rightarrow$ (iv) y (i) $\Rightarrow$ (v).*

Demostración. Véase Datko (1972) o Zabczyk (1992) ■

En una configuración de dimensión infinita, (3.34) tiene que ser reemplazado por

$$\omega \leq \omega_0 \tag{3.35}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega &:= \sup \{\operatorname{Re} \lambda / \lambda \in \sigma(A)\} \quad \text{es la abscisa espectral, y} \\ \omega_0 &:= \inf \left\{\mu \in \mathbb{R} / \exists C > 0, \ \|S(t)\| \leq Ce^{\mu t} \text{ para todo } t \geq 0\right\} \\ &\quad \text{es la mejor tasa de decaimiento.} \end{aligned}$$

Para probar (3.35), seleccionamos cualquier $\mu > \omega_0$, de modo que$\|S(t)\| \leq Ce^{\mu t}$ para alguna constante $C > 0$ y toda $t \geq 0$. Luego, por un conocido resultado en teoría de semigrupos, para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda > \mu$, tenemos que $\lambda \in \rho(A)$ y $(\lambda I - A)^{-1} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)\, dt$. Por lo tanto $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}\ z \leq \mu\}$, y $\omega \leq \mu$.

La existencia de un posible espacio entre ω y ω_0 está atestiguado por el siguiente lema.

Lema 3.2 *Sea $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ una sucesión arbitraria de números reales tales que $|\lambda_k| \to \infty$. Entonces existe un semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ en $H = l^2_{loc}(\mathbb{N})$ tal que*

$$\|S(t)\| \leq e^t, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ y} \sigma(A) = \{i\lambda_k : k = 1, 2, ...\}$$

donde A denota el generador de $(S(t))_{t\geq 0}$. En particular, $\omega = 0 < \omega_0 = 1$.

Demostración. Véase Zabczyk (1992). ■

Definición 3.1 *Si se cumple (i) (o equivalentemente (ii) o (iii)), entonces decimos que el semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable. Cuando (iv) se cumple, decimos que el semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente estable.*

Ahora revisamos los resultados de estabilidad clásicos basados en consideraciones de dominio de frecuencia.

Para la estabilidad fuerte, tenemos un resultado que es útil en aplicaciones.

Teorema 3.4 *(Arendt-Batty) Si $(S(t))_{t\geq 0}$ está acotada y $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, entonces $(S(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente estable.*

Demostración. Véase Arendt (1988), pág.843. ■

La condición $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ no es necesaria para que la estabilidad fuerte se mantenga, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 *Sea $Au = \dfrac{du}{dx}$ con dominio $D(A) = H^1(0, +\infty)$ en $H = L^2(0, +\infty)$. Entonces es fácil ver que A genera el semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ definido por - $[S(t)u](x) = u(x+t)$, donde $(S(t))_{t\geq 0}$ es fuertemente estable (como $u(\cdot + t) \to 0$ en $L^2(0, +\infty)$ cuando $t \to \infty$), y que $i\mathbb{R} \subset \sigma(A)$. Para verificar la última afirmación, es suficiente observar que cada $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de A, con la función propia correspondiente $u(x) = \exp(\lambda x)$ $(u \in H^1(0, +\infty))$, y para usar el hecho de que $\sigma(A)$ es cerrado.*

Observe que solo la ubicación del espectro juega un papel en el teorema 3.4. Cuando miramos la tasa de decaimiento, entonces el comportamiento del resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$ cuando $\lambda \to \infty$ también debe ser considerado, como se demuestra en el próximo resultado.

Teorema 3.5 *(Huang-Prüss) Suponga que $(S(t))_{t\geq 0}$ es acotado. Entonces $(S(t))_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable si y solo si $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y $\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| < \infty$.*

Demostración. Véase Huang (1985) and Prüss (1984). ■

Finalmente, puede afirmarse una tasa de decaimiento polinomial cuando el crecimiento del resolutor en el eje imaginario es polinomial.

Teorema 3.6 *(Liu-Rao) Suponga que $(S(t))_{t\geq 0}$ está acotado, que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, y que para algún número $s > 0$*

$$\sup_{|\beta|\geq 1} \frac{1}{|\beta|^s} \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\| < \infty$$

Entonces, para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$ existe una constante $C_k > 0$ tal que

$$\|S(t)z\|_H \leq C_k \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{k}{s}} (\ln t) \|z\|_{D\left(A^k\right)}, \text{ para todo } z \in D\left(A^k\right)$$

Demostración. Véase Liu (2005). ■

Observación 3.2 *Sea*

1. *Cuanto más suave sea z, más rápido será el decaimiento.*

2. *Para $k = 1$, $\|S(t)z\|_H \leq C_k (\ln t)^{1+1/s} t^{-1/s} \|z\|_{D(A)}$. Tenga en cuenta que $\|z\|_{D(A)}$ no puede ser reemplazado por$\|z\|_H$. De hecho, tenemos el resultado (bastante sorprendente pero fácil).*

Proposición 3.1 *Si $\|S(t)x\|_H \leq f(t)\|x\|_H$ con $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, entonces $(S(t))_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable.*

3.3.3. Estabilidad de los sistemas de dimensión infinita.

Para cualquier operador acotado $K \in L(H, U)$, permitimos que A_K denote el operador $A_K z = Az + BKz$ con dominio $D(A_K) = D(A)$, y por $(S_K(t))_{t \geq 0}$ el semigrupo generado por A_K.

Definición 3.2 *El sistema de control $\sum_{A,B}$ se dice que es:*

1) *Exponencialmente estable si existe una realimentación $K \in L(H, U)$ tal que el operador A_K sea exponencialmente estable; es decir, para alguna constante $C > 0$, $\mu > 0$;*

$$\|S_K(t)\| \leq Ce^{-\mu t}; \text{ para todo } t \geq 0$$

2) *completamente estabilizable si es exponencialmente estabilizable con una tasa de decaimiento exponencial arbitraria; es decir, para $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrario, existe una realimentación $K \in L(H, U)$ y una constante $C > 0$ tal que:*

$$\|S_K(t)\| \leq Ce^{-\mu t} \text{ ; para todo } \geq 0$$

El primer resultado se debe a Datko (1972). (Ver también Zabczyk (1992)).

Teorema 3.7 *Si el sistema $\left(\sum_{A,B}\right)$ es nulo controlable, entonces es exponencialmente estabilizable.*

El siguiente resultado da una versión infinita dimensional del teorema de Wonham.

Teorema 3.8 *Supongamos que A genera un grupo $(S(t))_{t \geq 0}$ de operadores. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

1) $\left(\sum_{A,B}\right)$ *es exactamente controlable en algún tiempo $T > 0$;*

2) $\left(\sum_{A,B}\right)$ *es nulo controlable en algún tiempo $T > 0$;*

3) $\left(\sum_{A,B}\right)$ *es completamente estabilizable.*

La implicación $(2) \Longrightarrow (3)$ se debe a Slemrod (1974), mientras que la implicación $(3) \Longrightarrow (1)$ se debe a Megan (1975) (ver también Zabczyk (1992)). $(1) \Longrightarrow (2)$ es obvio.

El teorema 3.8 se aplica en particular a un operador A skew-adjunto, que genera un grupo de isometrías en H. De hecho, se puede decir más. Primero, tenemos el principio de çontrolabilidad a través de la estabilidad"debido a Russell (1978). Por otro lado, se pueden dar leyes de retroalimentación explícitamente estabilizadoras.

Corolario 3.1 *(Liu (1997)) Supongamos que A es skew-adjunto. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

1) $\left(\sum_{A,B}\right)$ *es exactamente controlable en algún tiempo $T > 0$;*

2) $\left(\sum_{A,B}\right)$ *es nulo controlable en algún tiempo $T > 0$;*

3) $\left(\sum_{A,B}\right)$ *es completamente estabilizable;*

4) $\left(\sum_{A,B}\right)$ *es exponencialmente estabilizable;*

5) *Para cada operador autoadjunto definido positivo $S \in L(U)$, el operador $A - BSB^*$ genera un semigrupo exponencialmente estable en H.*

Como una aplicación, siguiendo a Liu (1997), consideramos un sistema de control de segundo orden abstracto.

$$\ddot{\omega} + L\omega = a(x)\,u \tag{3.36}$$

$$(\omega(0), \dot{\omega}(0)) = (\omega_0, \omega_1) \tag{3.37}$$

donde L es un operador autoadjunto definido positivo con dominio $D(L) \subset H$, $u \in U = H$, y $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ es tal que $aH \subset H$. Introducimos el espacio $\widehat{H} = D\left(L^{\frac{1}{2}}\right) \times H$ dotado con el producto escalar

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle_{\widehat{H}} = \left\langle L^{\frac{1}{2}} f_1, L^{\frac{1}{2}} f_2 \right\rangle_H + \langle g_1, g_2 \rangle_H$$

El sistema de control de segundo orden (3.36)- (3.37) se puede escribir en la forma (3.33), con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -L & 0 \end{bmatrix} \text{ definido en el dominio } D(A) = D(L) \times D\left(L^{\frac{1}{2}}\right);$$

y $B \in L\left(U, \widehat{H}\right)$ se define por $B(u) = (0, au)$.

Ejemplo 3.2 *Sea la ecuación de onda con control interno:*

$$
\begin{aligned}
\ddot{\omega} - \Delta\omega &= a(x)\,u \quad \textit{en} \quad (0,T)\times\Omega \\
\omega &= 0 \ \ \textit{sobre} \quad (0,T)\times\partial\Omega \\
(\omega(0), \omega_t(0)) &= (\omega_0, \omega_1)
\end{aligned}
$$

se refiere, con $H = U = L^2(\Omega)$, $L = -\Delta^2$, $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $D\left(L^{\frac{1}{2}}\right) = H_0^1(\Omega)$, *siendo cualquier función en* $L^\infty(\Omega)$.

Ejemplo 3.3 *Considere la ecuación de onda en el dominio* $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$ *dentro del control interno* $\chi_\omega u$, *con* $\omega = (a,b)\times(0,\pi)$, $0 < a < b < \pi$. *El GCC está siendo vulnerado, el sistema no es EC (por ningún tiempo* T*) en el espacio* $\widehat{H} = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$. *Según el Corolario 3.1, el sistema de circuito cerrado*

$$
\begin{cases}
\ddot{\omega} - \Delta\omega + \chi_\omega\dot{\omega} = 0 \\
\omega\,|_{\partial\Omega} = 0
\end{cases}
$$

no es exponencialmente estable. Aplicando el Teorema 3.6 (Liu y Rao), sin embargo, han demostrado en Liu (2005) que una tasa de decaimiento polinomial se mantiene en ese caso,

$$
\|(\omega,\omega_t)\|_{\widehat{H}} \le C_k \left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\dfrac{k}{2}} (\ln t)\,\|(\omega_0,\omega_1)\|_{D\left(A^k\right)}, \ \textit{para todo} \ (\omega_0,\omega_1)\in D\left(A^k\right)
$$

Conclusiones

1. Hemos presentado las condiciones necesarias para el estudio de la controlabilidad de las ecuaciones diferenciales parciales, así como los espacios en los cuales se dasarrollan. También hemos estudiado la controlabilidad exacta, aproximada y nula de las ecuaciones diferenciales parciales.

2. Se ha demostrado que la controlabilidad de la ecuación de onda puede ser determinada en base a la observabilidad del sistema autoadjunto.

3. Se ha estudiado la controlabilidad de la ecuación de calor que se deriva de las estimaciones de Carleman.

Bibliografía

[1] B

Arendt W. and Batty C. J. K., (1988). *Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups*", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 306, n 2, p. 837-852.

Brézis H (1984). Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial.

Casas E (1992). Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Publicaciones de la Universidad de Cantabria (Santander).

Coron J.-M. *Control and nonlinearity, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society,* Providence, RI, to appear.

Coron J.-M. and Crépeau E. (2004). *Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths*, J. Eur. Math Soc. (JEMS), vol. 6, n^{o}3, p. 367-398.

Datko R. (1972). Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in a Banach space", SIAM J. Math. Anal., vol. 3, p. 428-445.

Dolecky S. and Russell D. L. (1977). *A general theory of observation and control,* SIAM J. Control and Optimization, vol 15, n^{o}2, p. 185-220.

Evans L. C. (1998). *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI.

Fernández-Cara E. and Guerrero S. (2006). *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. Control Optim., vol. 45, n^{o}4, p.1399-1446 (electronic).

Gonzales B. M. (2001). *Controlabilidad de E.D.P. Parabólicas*, Bol Soc. Esp. Mat Apl. n^{o}19, 13-44.

Hörmander L. (2003). *The analysis of linear partial differential operators.* I, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

Huang F. L. (1985). *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces*, Ann. Differential Equations, vol. 1, n 1, p. 43-56.

Imanuvilov O. Yu and Yamamoto M. On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations, to appear.

Lang S (1969). Real Analysis. Addison-Wesley.

Lions J.-L. (1988). *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués.* Tome 1, vol. 8 of Recherches en Mathèmatiques Appliquèes (Research in Applied Mathematics), Masson, Paris.

Liu K. (1997). *Locally distributed control and damping for the conservative systems*, SIAM J. Control Optim., vol. 35, n 5, p. 1574-1590.

Liu Z., Rao B. (2005). *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation*, Z. Angew. Math. Phys., vol. 56, n 4, p. 630-644.

Micu S. and Zuazua E. (2005). *An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations*, in Quelques questions de théorie du contrôle. Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, to appear.

Pazy A. (1983). Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York..

Prüss J. (1984). *On the spectrum of C0-semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 284, n 2, p. 847-857.

Rosier L. (2004). *Control of the surface of a fluid by a wavemaker*, ESAIM Control Optim. Cal. Var., vol. 10, n^{o}3, p. 346-380 (electronic).

Rosier L. (2007). A survey of controllability and stabilization results for partial differential equations, RS - JESA. Volume 41 – n^o 3-4/2007, pages 365 to 411.

Russell D. L., (1973). *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Appl. Math., vol. 52, p. 189-211.

Russell D. L. (1978). *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, SIAM Rev., vol. 20, n^{o}4, p. 639-739.

Russell D. L. and Zhang B.Y. (1993). *Controllbility and stabilizability of the third-order linear dispersion equation on a periodic domain,* SIAM J. Control Optim., vol. 31, n^{o}3, p. 659-676.

Zabczyk J. (1992). *Mathematical control theory: an introduction, Systems & Control: Foundations & Applications,* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.

Zuazua E. (2005). *Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference method*s, SIAM Rev., vol. 47, n^{o}2, p. 197-243 (elecronic).