UNIVERSIDAD NACIONAL SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y FORMALES

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“ANÁLISIS DE PROBABILIDAD DE LA TRIPLE COLISIÓN DE PARTÍCULAS BROWNIANAS”

Tesis presentada por:

BACH. JOSE ANTONIO ZEGARRA BRAVO

Para optar por el Título Profesional de

Licenciado en Matemáticas

Asesor: Dr. Richard Manuel Mamani Troncoso

Arequipa-Perú

2019

La presente investigación es dedicada a las tres personas más importantes en vida, mi madre Amelia, quien con su ejemplo me enseñó a nunca darme por vencido, mi esposa Alejandra, quien es mi principal soporte para lograr mis metas y objetivos, y por último dedico mi trabajo de tesis a mi ángel en el cielo Mateo, que me enseñó el verdadero sentido de la vida.

Agradecimientos especiales al Dr. Richard Manuel Mamani Troncoso, cuya asesoría, apoyo y dedicación, fue fundamental para lograr concluir en presente trabajo de investigación.

Análisis de probabilidad de la triple colisión de partículas Brownianas.

2019

Índice general

Resumen IV

Introducción V

1. Preliminares 1
1.1. Procesos Estocásticos 1
1.2. Movimiento Browniano 2
1.2.1. Incrementos de un movimiento Browniano 3
1.2.2. Propiedades del camino aleatorio de un movimiento Browniano 6
1.3. **Ruido Blanco** 9
1.4. Procesos aleatorios generalizados 11
1.4.1. Momentos de Procesos Aleatorios Generalizados: Procesos Gaussianos 11
1.4.2. Procesos Gaussianos 12
1.4.3. Ejemplos de procesos aleatorios generalizados 13
1.5. Procesos de difusión y ecuaciones en derivadas parciales 16
1.5.1. La difusión desde el punto de vista microscópico 16
1.6. El problema de la martingala 21

2. Planteamiento del problema 24
2.1. Formulación del problema a estudiar: Movimiento de partículas Brownianas 24
2.2. Coeficientes de deriva y difusión asociado al Proceso de Difusión 25
2.2.1. Forma de los coeficientes de deriva y difusión asociados al Proceso de Difusión 25
2.2.2. Soluciones fuertes y débiles de las ecuaciones diferenciales estocásticas 25
2.3. Transformación de Girsanov y proceso de reducción de la ecuación diferencial estocástica 27
2.3.1. Teorema de Girsanov 27
2.3.2. Transformación de Girsanov 28
2.4. Generador infinitesimal asociado al proceso de difusión 30
2.5. Formulación del problema a estudiar 31
2.6. Formulación equivalente al problema a través de tiempos de parada 31
2.6.1. Tiempos de parada a utilizar 32
2.7. Formulación equivalente al problema a través de una forma integral 33
2.7.1. Una aplicación de la formula de Itô y del teorema opcional del muestreo 34
2.7.2. Obtención de la forma integral equivalente 36

3. Colisión de partículas Brownianas 39

3.1. Ecuaciones diferenciales parciales y el problema de Dirichlet 39

3.2. Problema de Dirichlet 40
3.3. Estimación requerida para el tratamiento del problema 40
3.4. Dimensión efectiva 41

3.5. Problema de Dirichlet: caso suave 42
3.6. Función Barrera 43

3.7. Aproximación entre los generadores de difusión 46

3.8. Formulación y comprobación de resultados 50

3.9. Conclusiones 52

3.10. Sugerencias 52

Resumen

A lo largo de la evolución de la matemática como ciencia exacta, se han desarrollado una serie de ramas, como lo son el algebra, la geometría, la teoría de números, tan sólo por mencionar a unas cuantas, es por ello la importancia de esta importante ciencia exacta en el desarrollo de la humanidad.

Hoy en día la matemática continúa su desarrollo con nuevas teorías, una de ellas es la estadística; muy desarrollada en el último siglo, en el presente proyecto de tesis se mostrará una serie de resultados que utilicen a esta importante rama de la matemática, siendo específico se formulará el estudio del movimiento de partículas; ya estudiado anteriormente por R. Brown y N. Wiener, y que dieron inicio al campo de los procesos estocásticos, el cual utiliza varias propiedades de la teoría de probabilidad, así como también el estudio de la teoría de la medida. Con todo esto se busca interpretar y entender el interesante fenómeno que se produce al observar el movimiento de los caminos aleatorios producidos por las partículas, que de ahora en adelante recibirán el nombre de partículas Brownianas.

El presente trabajo busca analizar a un determinado proceso estocástico, el cual es la solución de una ecuación diferencial estocástica, y que a la vez es un proceso de difusión, con esto último se muestra la relación existente entre el análisis estocástico y las ecuaciones en derivadas parciales, las cuales serán de mucha utilidad para lograr un completo análisis de este interesante fenómeno planteado. Con todo lo anterior se busca obtener la probabilidad de ocurrencia de la colisión de las partículas Brownianas mencionadas anteriormente, todo esto tiene la finalidad aplicar todo lo presentado en el presente proyecto de tesis a diferentes campos, como lo son: los movimientos sísmicos y principalmente la economía, donde nuestro fenómeno estudiado puede ser directamente aplicado en la igualdad de mercados y otros estudios financieros, puesto que todos los ejemplos anteriores generan procesos estocásticos.

Introducción

En el presente proyecto de tesis, desarrollaremos algunas nociones asociadas al cálculo estocástico y los procesos estocásticos, como por ejemplo, daremos inicialmente, algunas nociones sobre el movimiento Browniano, posteriormente analizaremos la interesante relación que existe entre movimiento Browniano y el proceso de Ruido Blanco. Para desarrollar esta relación, será necesario introducir nociones acerca de los procesos aleatorios generalizados, lo cual nos será de mucha utilidad para abordar la noción de diferenciabilidad de movimiento Browniano desde un punto de vista distribucional. Posteriormente estudiaremos la siguiente ecuación integral estocástica con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s), 0 \leq t < \infty,$$

donde W es un movimiento Browniano n-dimensional y las funciones medibles $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$, son denominadas coeficientes de deriva y difusión respectivamente, asociados a la ecuación integral estocástica mencionada anteriormente. Este desarrollo se basará principalmente en tales coeficientes, a los cuales se colocarán algunas restricciones, como por ejemplo, la acotación de estos coeficientes, entre otras condiciones más que iremos detallando en este trabajo, con la finalidad de asegurar la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación integral estocástica en estudio. Así mismo, en el presente trabajo, estudiaremos los procesos de difusión, desde el punto de vista del análisis estocástico, dado que estos conceptos están estrechamente relacionados, a través de ciertos operadores diferenciales de segundo orden que dependen de los coeficientes mencionados anteriormente. Este operador diferencial, que denotaremos por $\mathcal{A}$ es denominado generador de difusión o como algunas veces será llamado generador infinitesimal asociado a un determinado proceso de difusión, debido a que las ecuaciones diferenciales estocásticas y cierto tipo de operadores están estrechamente relacionados a través de sus generadores, en el siguiente sentido: A todo proceso de difusión se puede asociar un operador diferencial de segundo orden, el cual nos proporciona una relación de este tipo de procesos estocásticos con la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. En general, podemos decir que los procesos de difusión proporcionan interpretaciones probabilísticas de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. Para ilustrar estas relaciones mencionadas anteriormente, será necesario utilizar, de algún modo, la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, es decir, introduciremos el problema de Dirichlet, con la finalidad de abordar una forma equivalente al siguiente problema, relacionado con el movimiento de tres partículas brownianas: consideremos los coeficientes estudiados anteriormente μ y σ , de deriva y difusión, respectivamente, asociados al proceso de difusión en estudio, de forma tal que para $n \geq 3$, se tenga:

$$\begin{aligned} P_{x_0}\left(X_i(t) = X_j(t) = X_k(t), \text{ para algún } t > 0\right) &= 0 \text{ o} \\ P_{x_0}\left(X_i(t) = X_j(t) = X_k(t), \text{ infinitamente después}\right) &= 1; \end{aligned}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq i < j < k \leq n$. Este problema planteado está referido a la existencia y unicidad de soluciones débiles de la ecuación diferencial estocástica estudiada anteriormente, siendo un procesos de difusión. Así, en el problema planteado, se analiza la probabilidad de que colisionen las tres partículas Brownianas en un determinado tiempo, este interesante fenómeno trata de analizar el comportamiento de los caminos aleatorios de la solución de la ecuación integral estocástica planteada anteriormente, y de modo que se pueda hallar la probabilidad de que estas partículas Brownianas colisionen en algún momento.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Procesos Estocásticos

Para desarrollar la presente tesis, es necesario introducir algunas nociones de procesos estocásticos que serán de mucha utilidad en el presente trabajo de investigación, esto sustentará y dará una base a los resultados presentados en los siguientes capítulos del presente trabajo.

Definición 1.1 *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias reales* $\{X(t), t \geq 0\}$ *definidas sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*.*

Como ejemplos de procesos estocásticos podemos mencionar los siguientes: la temperatura del día, la concentración de ozono en el aire durante el día, la presión arterial de una persona durante una semana, el precio de una acción en el mercado de valores durante una semana, los instantes de inicio y duraciones de las llamadas telefónicas, las vibraciones de un edificio durante un sismo y muchas más.

Definición 1.2 *Para cada* $\omega \in \Omega$*, la función*

$$t \longmapsto X(t, \omega)$$

se denomina camino aleatorio del proceso estocástico.

El conjunto de parámetros $[0, \infty)$ representa el tiempo y en algunos casos asumiremos que es un intervalo acotado $[0, T]$, o es el conjunto de los números naturales (procesos a tiempo discreto).

Si fijamos un sucesión finita de instantes de tiempo $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, obtenemos un vector aleatorio:

$$(X(t_1), ..., X(t_n)) : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Luego, las distribuciones de probabilidad $P_{t_1,\ldots,t_n} = P \circ ((X(t_1), ..., X(t_n)))^{-1}$ se denominan distribuciones finito dimensionales del proceso.

Definición 1.3 *Suponga que* $\{X(t)\}$ *y* $\{Y(t)\}$ *son proceso estocásticos definidos sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Entonces diremos que* $\{X(t)\}$ *es una versión (o modificación) de* $\{Y(t)\}$ *si:*

$$P(\{\omega \in \Omega; X(t) = Y(t)\}) = 1 \text{ , para todo } t$$

Así mismo, existen procesos estocásticos que sirven para modelar el futuro de ocurrencia de ciertos fenómenos aleatorios como por ejemplos los movimientos sísmicos, procesos financieros, entre otros, dados a través de las siguiente:

Definición 1.4 *Un proceso estocástico* $M = \{M_t; 0 \leq t < \infty\}$ *diremos que es una martingala con respecto a una familia creciente de* $\sigma-$*álgebras* $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$*, contenidas en* $\mathcal{F}$ *, si se cumplen las siguientes propiedades:*

- M_t *es medible respecto a* $\mathcal{F}_t$*, para todo* $t \geq 0$,
- $E(|M_t|) < \infty$ *para todo* $t \geq 0$*, y*
- $E(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$*, si* $s \leq t$.

Definición 1.5 *Una variable aleatoria* $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ *es llamada tiempo de parada con respecto a la* $\sigma-$*álgebra* $\mathcal{F}$*, cuando:*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Esto quiere decir, que el conjunto de todos los $\omega \in \Omega$ tal que $\tau(\omega) \leq t$ es un conjunto $\mathcal{F}(t) - \text{medible}$.

1.2. Movimiento Browniano

El movimiento Browniano fue descubierto en 1827 por el botánico escocés Robert Brown, fué quién observó que los granos de polen suspendidos en un recipiente con agua, se movían de forma irregular. Inicialmente Brown atribuyó este comportamiento al movimiento de células sexuales masculinas vivas; pero no tardó mucho tiempo en comprobar que el mismo comportamiento mostraban los granos de polen que llevaban décadas almacenados e, incluso, partículas inorgánicas suficientemente ligeras. Luego este fenómeno se atribuyó, entonces, a las corrientes de conveción térmica del medio; pero la independencia de los movimientos seguidos por partículas próximas, descartó rápidamente esta explicación. Además de eso, en 1865 se mantuvo una suspensión de partículas sellada durante un año completo, sin observarse ninguna dismunición en su movimiento.

Así mismo, observaciones detalladas a partir de 1860, por Gouy y Exner, mostraron sobre todo que la actividad del movimiento de las partículas crece al disminuir el tamaño de las mismas, sin que influya su densidad, al aumentar la temperatura o al disminuir la viscosidad del medio; en el sentido de que la partícula se aleja más, en el mismo tiempo, de su posición inicial.

Una explicación cualitativa correcta fue sugerida en 1877 por Desaulx: el movimiento de las partículas es debido a los impactos continuos que sufren por parte de las moléculas del medio, sometidas al movimiento térmico en direcciones aleatorias y con velocidades descritas por la distribución de Maxwell. Así, cualquier partícula suficientemente grande como para ser observada en microscopio, con inercia suficientemente pequeña, sufre constantes colisiones por parte de las moléculas que la rodean y cada colisión altera su velocidad en una dirección y con un módulo aleatoriamente determinados por la energía y la trayectoria de la molécula que la golpea. Como una consecuencia de esto, la trayectoria de la partícula cambia constantemente de dirección y produce el movimiento erratico de la partícula. Cuando se produjo esta explicación de movimientos aleatorios, la teoría atómica de la materia y la explicación cinética del calor estaban recién desarrollándose y lejos de ser universamente aceptadas. Siendo así, el movimiento Browniano de las partículas en suspensión se propuso como uno de los primeros efectos observables que corroboraban dichas teorías.

Finalmente, desde el punto de vista matemático, fue Norbert Wiener, conocido sobre todo como el padre de la cibernética, quien inicio en 1918 el estudio del movimiento Browniano, que en buena parte, originó el desarrollo de la teoría de los procesos estocásticos. Así, gracias a la influencia de N. Wiener, A. Kolmogorov, de P. Lévy, y muchos otros, esta teoría en estudio obtuvo un desarrollo rápido. En cualquier caso, después de sus inicios, el movimiento Browniano fue progresivamente adquiriendo un lugar esencial en el desarrollo de numerosas áreas de las ciencias puras y aplicadas. En estas últimas, cabe citar como escenarios de aplicación a la electrónica, la ingeniería, la biología y la economía.

A continuación, mostramos el modelo planteado por Norbert Wiener, para este tipo de movimiento, basado en la teoría de los procesos estocásticos, el cual es interpretado como la posición de una partícula de polen ω en cada instante $t \geq 0$.

Definición 1.6 *Dado el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *,un movimiento Browniano (Proceso de Wiener) es un proceso estocástico W(t) con valores en* $\mathbb{R}$ *o en* $\mathbb{R}^d$*, definido para* $t \in [0, \infty)$ *tal que:*

- $W(0) = 0$ *P-c.c.,*
- *Los caminos aleatorios* $t \to W(t)$ *son continuos c.c.(casi ciertamente), y*
- *Para sucesiones finitas de tiempos* $0 < t_1 < ... < t_n$ *y sucesiones finitas de borelianos* $A_1, ..., A_n \subset \mathbb{R}$*, se cumple:*

$$P[W(t_1) \in A_1, ..., W(t_n) \in A_n] = \int_{A_1} ... \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_{1,} x_1, x_2) \cdot ... \cdot p(t_n - t_{n-1,} x_{n-1}, x_n) dx_n dx_{n-1} ... dx_1 \ ,$$

donde $p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$*, es definido para* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $t > 0$*. A esto se le llamará función de densidad de transición.*

Observación 1.1 *Una vez introducida la definición anterior, es necesario indicar con estados sobre* $\mathbb{R}$*, la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria W(t) está dada por:*

$$f_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

donde su media es 0 y su varianza es t, respectivamente.

En efecto, la tercera condición de la definición anterior implica que la función de distribución de probabilidad correspondiente a la variable aleatoria $W(t)$ está dada por:

$$
\begin{aligned}
F_{W(t)}(x) &= P\left[W(t) \le x\right] \\
&= P\left[W(t) \in (-\infty, x]\right] \\
&= \int_{]-\infty,x]} p(t,0,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= \int_{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy,
\end{aligned}
$$

donde $A = \langle -\infty, x] \in \beta(\mathbb{R})$ es un boreliano y $f_{W(t)}(x)$ es la densidad de probabilidad de $W(t)$. Luego, integrando por partes podemos calcular la esperanza de la variable aleatoria $W(t)$:

$$
\begin{aligned}
E\left[W(t)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{W(t)}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(t,0,y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= -\frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dy}\left(e^{-\frac{y^2}{2t}}\right) dy \\
&= -\frac{t}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0
\end{aligned}
$$

A partir de ahí, podemos calcular la varianza de la variable aleatoria $W(t)$, es decir:

$$
\begin{aligned}
E\left[(W(t))^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{W(t)}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(t,0,y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= -\frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{d}{dy}\left(e^{-\frac{y^2}{2t}}\right) dy \\
&= -\frac{t}{\sqrt{2\pi t}} x e^{-\frac{x^2}{2t}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \\
&= 0 + \frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{t} du = t.
\end{aligned}
$$

Es necesario indicar que, hemos utilizado la sustitución $u = \frac{x}{\sqrt{t}}$ y la siguiente propiedad:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.
$$

Definición 1.7 *Sea* $W(t) = (W^1(t), ..., W^n(t))$ *un proceso estocástico. Diremos que* $W(t)$ *es un Movimiento Browniano n-dimensional si cada una de las funciones coordenadas* $W^i(t), 1 \le i \le n$, *son movimientos Brownianos independientes.*

1.2.1. Incrementos de un movimiento Browniano

Una vez formulada la noción de movimiento Browniano, es necesario establecer algunas de sus propiedades, las cuales son fundamentales para poder definir de un modo más detallado el movimiento Browniano.

Siendo así, iniciamos con la siguiente:

Proposición 1.1 *Para* $s, t \in \mathbb{R}$, *con* $0 \leq s < t$, *el incremento* $W(t) - W(s)$ *tiene distribución normal con media cero y varianza* $t - s$
Prueba. *La función de distribución de probabilidad de las variables aleatorias* $W(s), W(t)$ *está dada por:*

$$\begin{aligned}
F_{W(s),W(t)}(x,y) &= P\left[W(s) \leq x, W(t) \leq y\right] \\
&= \int_{]-\infty,x]} \int_{]-\infty,y]} f_{W(s),W(t)}(u,v)dudv \\
&= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{W(s),W(t)}(u,v)dudv \\
&= \int_{A_1} \int_{A_2} f_{W(s),W(t)}(u,v)dudv.
\end{aligned}$$

Por la definición (5) $f_{W(s),W(t)}(x,y) = p(s,0,x)p(t-s,x,y)$ *es la densidad de probabilidad de las variables aleatorias* $W(s), W(t)$, *para* $s, t \in \mathbb{R}$ *con* $0 \leq s < t$ *y* $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$. *De aquí, para algún Boreliano* $A \in \beta(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
F_{W(t)-W(s)}(z) &= P\left[W(t) - W(s) \leq z\right] \\
&= P\left[W(t) - W(s) \in (-\infty, z]\right] \\
&= P\left[W(t) - W(s) \in A\right] \\
&= \int_{\{(x,y):x-y\in A\}} p(s,0,x)p(t-s,x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,0,x)\left(\int_{\{y:x-y\in A\}} p(t-s,x,y)dy\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,0,x)\left(\int_{A} p(t-s,x,x-u)du\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p(s,0,x)\left(\int_{A} p(t-s,0,u)du\right)dx \\
&= \int_{A} p(t-s,0,u)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(s,0,x)dx\right)du \\
&= \int_{A} p(t-s,0,u)du\ ,
\end{aligned}$$

donde $f(u) = p(t-s,0,u)$ *es la función de densidad de la distribución normal con media cero y varianza* $t-s$.
■

Observación 1.2 *La proposición anterior implica que* $W(t)$ *tiene incrementos estacionarios, es decir, para* $s, t \in [0, \infty)$ *la distribución de probabilidad de la variable aleatoria* $W(t+h)-W(s+h)$ *es igual a la distribución de la variable aleatoria* $W(t) - W(s)$ *para cada h, donde* $s + h, t + h \in [0, \infty)$.

Proposición 1.2 *Para los números reales no negativos* $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, *los incrementos* $W(t_1) - W(t_0), ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$ *son independientes.*
Prueba. *Sabemos que* $W(t) - W(s)$, *para s<t tiene distribución normal. De ahí que, variables aleatorias distribuidas normalmente son independientes si y solamente si, se cumple que:*

$$E\left[(W(u) - W(t))(W(s) - W(r))\right] = 0,$$

para $0 \leq r \leq s \leq t \leq u$. *En efecto, primero demostremos el siguiente resultado*

$$E\left[W(t)W(s)\right] = \text{mín}(s,t).$$

Supongamos que s<t, luego la función de densidad conjunta de $W(s)$ *y* $W(t)$ *está dada por:*

$$f_{W(s),W(s)}(x,y) = p(s,0,x)p(t-s,x,y),$$

esto es consecuencia de la definición (1.6), como se demostró anteriormente. De ahí, tenemos que:

$$\begin{aligned} E[W(t)W(s)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(s,0,x)p(t-s,x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(s,0,x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yp(t-s,x,y)dy\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(s,0,x)dx = s. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $y = x+u$, *esta última relación es debido a que:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} yp(t-s,x,y)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x+u)p(t-s,x,x+u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x+u)p(t-s,0,u)du \\ &= x\int_{-\infty}^{+\infty} p(t-s,0,u)du + \int_{-\infty}^{+\infty} up(t-s,0,u)du \\ &= x+0 = x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $s,t \geq 0$ *arbitrarios, tenemos:*

$$E[W(t)W(s)] = \text{mín}(s,t).$$

A partir de esta relación, si $0 \leq r \leq s \leq t \leq u$

$$\begin{aligned} E[(W(u)-W(t))(W(s)-W(r))] &= E[(W(u)W(s)] - E[(W(u)W(r)] \\ &\quad -E[(W(t)W(s)] + E[(W(t)W(r)] \\ &= s-r-s+r = 0. \end{aligned}$$

Como una consecuencia inmediata de la proposición anterior, se obtiene que la relación de los incrementos con la información acumulada del movimiento Browniano hasta un tiempo s. ∎

Corolario 1.1 *Para* $0 \leq s < t$ *el incremento* $W(t)-W(s)$ *es independiente de la* $\sigma-$*álgebra*

$$\mathcal{F}_s = \sigma\{W(r) : 0 \leq r < s\}.$$

Prueba. *Basta Utilizar la proposición anterior, pues se tiene que las variables aleatorias* $W(t)-W(s)$ *y* $W(r)-W(0) = W(r)$ *son independientes, siempre que* $0 \leq r \leq s \leq t$ *. Ahora, dado que la* $\sigma-$*álgebra* F_s *es generada por* $W(r)$, *entonces* $W(t)-W(s)$ *es independiente de* A_s. ∎

La definición de movimiento Browniano involucra una familia de distribuciones finito dimensionales (probabilidades) con una forma específica, definidas sobre espacios euclidianos, que además satisfacen las condiciones de simetría y compatibilidad, de modo que nos permita la construcción de un proceso estocástico sobre un determinado espacio de probabilidad, que posee ciertas propiedades fundamentales, como la de incrementos estacionarios independientes y la de incrementos finitos con distribución normal de media cero y varianza igual a la diferencia de las varianzas. Sin embargo, a través del siguiente resultado, podemos ver que tales propiedades pueden ser tomadas como la definición de un movimiento Browniano y de ahí que, constituyen una caracterización de movimiento Browniano para ciertos procesos estocásticos con algunas particularidades distinguidas del resto. Por esta razón daremos la siguiente definición.

Definición 1.8 *Un proceso estocástico* $W(t), t \geq 0$ *es un Movimiento Browniano si y solamente si las siguientes condicones se cumplen:*

- $W(0) = 0$ $P-$c.c.,
- *El camino aleatorio* $t \to W(t)$ *es continuo P-c.c.*,
- $W(t)$ *tiene incrementos estacionarios independientes, y*
- *El incremento* $W(t)-W(s)$ *tiene distribución normal con media cero y varianza* $t-s$ *para algún* $0 \leq s < t$.

1.2.2. Propiedades del camino aleatorio de un movimiento Browniano

En está sección demostraremos que para casi todo $\omega \in \Omega$, el camino aleatorio $t \to W(t,\omega)$ es uniformemente Hölder continuo para cada exponente $\gamma < \frac{1}{2}$, pero no es Hölder continuo en ningún lugar cuando el exponente satisface $\gamma > \frac{1}{2}$. En particular $W(t,\omega)$ es no diferenciable en ningún punto c.c.

Para analizar la situación anterior necesitamos de las siguientes definiciones.

Definición 1.9 *Sea $0 < \gamma \leq 1$. Una función $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ es llamada uniformemente Hölder continua con exponente $\gamma > 0$, si existe una constante $K > 0$ tal que*

$$|f(t) - f(s)| \leq K\,|t-s|^{\gamma} \;\; \text{para todo } s,t \in [0,T]\,.$$

Definición 1.10 *Una función es Höder continua con exponente $\gamma > 0$ en el punto s si existe una constante $K > 0$ tal que*

$$|f(t) - f(s)| \leq K\,|t-s|^{\gamma} \;\; \text{para todo } t \in [0,T]\,.$$

Una vez establecidos estos contenidos, daremos paso a probar algunas propiedades de los caminos aleatorios.

Continuidad de los caminos aleatorios

Una de las propiedades interesantes de los procesos estocásticos, es la continuidad de los caminos aleatorios. Puede suceder que un determinado proceso, sobre todo aquellos que son canónicos, no tengan la propiedad de la continuidad de sus caminos; sin embargo es posible encontrar una versión o modificación de esta que tenga casi todos sus caminos aleatorios continuos; lo cual permitiría desarrollar mejor un estudio de dicho proceso. Uno de los resultados importantes para probar la Hölder continuidad de los caminos aleatorios es el que damos a continuación.

Teorema 1.1 *(Teorema de continuidad de Kolmogorov) Sea $X(\cdot)$ un proceso estocástico con caminos aleatorios continuos casi ciertamente, tal que:*

$$E\left[|X(t) - X(s)|^{\beta}\right] \leq C\,|t-s|^{1+\alpha}\,,$$

para constantes $\alpha, \beta > 0, C \geq 0$, para todo $t, s \geq 0$. Entonces para cada $0 < \gamma \leq \frac{\alpha}{\beta}, T > 0$, y casi todo ω, existe una constante $K = K(\omega,\gamma,T)$ tal que:

$$|X(t,\omega) - X(s,\omega)| \leq K\,|t-s|^{\gamma}\,,\; \text{para todo } s \geq 0, t \leq T.$$

Así el camino aleatorio $t \mapsto X(t,\omega)$ es uniformemente Hölder continuo con exponente γ sobre $[0,T]$.

Prueba. (i) Para simplificar, tomemos $T = 1$. Entonces escogemos γ tal que

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} \;...\,(*)\,.$$

Ahora definimos para $n = 1, 2, ...,$ los eventos

$$A_n = \left\{ \left| X(\frac{i+1}{2^n}) - X(\frac{i}{2^n}) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}, \text{ para algún entero } 0 \leq i < 2^n \right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(A_n) &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} P\left(\left| X(\frac{i+1}{2^n}) - X(\frac{i}{2^n}) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}} \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} E\left(\left| X(\frac{i+1}{2^n}) - X(\frac{i}{2^n}) \right|^{\beta} \right) \left(\frac{1}{2^{n\gamma}} \right)^{-\beta}, \text{ por la desigualdad de Chebyshev} \\ &\leq C \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^n} \right)^{1+\alpha} \left(\frac{1}{2^{n\gamma}} \right)^{-\beta} \\ &= C 2^{n(-\alpha+\gamma\beta)}. \end{aligned}$$

De $(*)$ tenemos que $-\alpha+\gamma\beta<0$. Así se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

de donde el lema de Borel-Cantelli implica

$$P\left[\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_n\right] = 0.$$

Así, para casi todo ω existe $m=m(\omega)$ tal que

$$\left|X\left(\frac{i+1}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}} \text{ , para } 0\leq i\leq 2^n-1$$

Tomando $n\geq m$. Entonces tenemos

$$\begin{cases} \left|X\left(\frac{i+1}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \leq K\frac{1}{2^{n\gamma}} \text{ , para } 0\leq i\leq 2^n-1 \\ \text{para todo } n\geq 0 \end{cases} \quad ...(**)$$

si seleccionamos $K=K(\omega)$ lo suficientemente grande. (ii) Ahora veremos que $(**)$ implica la Hölder continuidad. Para ver esto, fijamos $\omega\in\Omega$ para el cual $(**)$ se cumple. Luego, sean $t_1,t_2\in[0,1]$ racionales, $0<t_2-t_1<1$, seleccionamos $n\geq 1$, tal que

$$2^{-n}\leq t\leq 2^{-(n-1)}, \text{ para } t=t_2-t_1 ...(***)$$

Podemos denotar por

$$\begin{cases} t_1 = \frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - ... - \frac{1}{2^{p_k}} \text{ , } (n<p_1<...<p_k) \\ t_2 = \frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{q_1}} + ... + \frac{1}{2^{q_l}} \text{ , } (n<q_1<...<q_l) \end{cases}$$

Luego, para

$$t_1\leq \frac{i}{2^n}\leq\frac{j}{2^n}\leq t_2.$$

Se tiene:

$$\frac{j-i}{2^n}\leq t<\frac{1}{2^{n-1}},$$

y así $j=i$ o $i+1$. En vista de $(**)$,

$$\left|X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n},\omega\right)\right| \leq K\left|\frac{i-j}{2^n}\right|^{\gamma} \leq Kt^{\gamma}.$$

Además

$$|X(i/2^n-1/2^{p_1}-...-1/2^{p_r},\omega) - X(i/2^n-1/2^{p_1}-...-1/2^{p_{r-1}},\omega)| \leq K\left|\frac{1}{2^{p_r}}\right|^{\gamma},$$

para $r=1,...,k$; y consecuentemente

$$\begin{aligned} \left|X(t_1,\omega) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| &\leq K\sum_{r=1}^{k}\left|\frac{1}{2^{p_r}}\right|^{\gamma} \\ &\leq \frac{K}{2^{n\gamma}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{r\gamma}} \text{ , desde que } p_r>n \\ &= \frac{C}{2^{n\gamma}}\leq Ct^{\gamma} \text{ , por } (***) \end{aligned}$$

De manera similar, podemos deducir

$$\left|X(t_2,\omega) - X\left(\frac{j}{2^n},\omega\right)\right| \leq Ct^{\gamma}.$$

Así, se obtiene

$$|X(t_1,\omega)-X(t_2,\omega)|\leq C|t_1-t_2|^{\gamma},$$

para todo $t_1,t_2\in[0,1]$ racionales y alguna constante $C=C(\omega)$. Desde que $t\longmapsto X(t,\omega)$ es continua para casi todo ω, lo calculado anteriormente también se cumple para todo $t_1,t_2\in[0,1]$. ■

Una aplicación de este resultado puede ser vizualizado en los movimientos Brownianos, ya que un cálculo directo, corrobora el cumplimiento de esta propiedad.

Aplicación al movimiento Browniano: Considere $W(\cdot)$, un Movimiento Browniano n-dimensional. Entonces para cada uno de los enteros $m = 1, 2, ...$ se cumple:

$$
\begin{aligned}
E\left[|W(t) - W(s)|^{2m}\right] &= \frac{1}{(2\pi r)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} e^{-\frac{|x|^2}{2r}} dx \ , \ \text{para } r = t - s > 0 \\
&= \frac{1}{(2\pi r)^{n/2}} r^m \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2m} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy \ , \ \left(y = \frac{x}{\sqrt{r}}\right) \\
&= Cr^m = C\,|t - s|^m \ .
\end{aligned}
$$

De este modo la hipótesis del teorema del Kolmogorov se cumple para $\beta = 2m$, $\alpha = m - 1$. De ahí que el proceso $W(\cdot)$ es Hölder continuo sobre $[0, T]$, para cada exponente $0 < \gamma < 1/2$.

Observación 1.3 *El teorema anterior puede también ser formulado de la siguiente forma: si* $X(\cdot)$ *es un proceso estocástico tal que*

$$
E\left[|X(t) - X(s)|^{\beta}\right] \leq C\,|t - s|^{1+\alpha} \ \ , (\alpha, \beta > 0, C \geq 0).
$$

Entonces el proceso estocástico X *tiene una versión* $\tilde{X}$ *tal que casi todo camino aleatorio es Hölder continuo para cada exponente* $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. *Por lo tanto, cada proceso de Wiener tiene una versión con la propiedad de que sus caminos aleatorios son continuos.*

Una propiedad de los caminos aleatorios correspondientes a un movimiento Browniano está relacionada a la no regularidad de sus caminos aleatorios, en el sentido de la diferenciabilidad.

No diferenciabilidad en casi ningún punto del dominio del camino aleatorio del movimiento Browniano Los caminos aleatorios de un Movimiento Browniano no son Hölder continuos con exponente mayor que $\frac{1}{2}$, y así no son diferenciables en ningún punto.

Teorema 1.2 *Para cada* $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ *y casi todo* ω, *el camino aleatorio* $t \mapsto W(t, \omega)$ *no es continuo con exponente* γ. *En particular, para casi todo* ω, *el camino aleatorio* $t \mapsto W(t, \omega)$ *no es diferenciable en ningún punto y además es de variación infinita sobre cada subintervalo.*

Prueba. *Es suficiente considerar a un Moviemiento Browniano 1-dimensional, y para fijar ideas, sin perdida de generalidad, tomaremos sólo aquellos tiempos,* $0 \leq t \leq 1$. *Entonces fijemos un entero* N *tal que*

$$
N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1.
$$

Luego, supongamos que la función $t \mapsto W(t, \omega)$ *es Hölder continua con exponente* γ *en algún punto* $0 \leq s < 1$, *entonces*

$$
|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq K\,|t - s|^{\gamma} \text{ , para todo } t \in [0, 1] \text{ y alguna constante } K.
$$

Entonces, para $n \gg 1$, *sea* $i = [ns] + 1$ *y note que para* $j = i, i + 1, ..., i + N - 1$, *se cumple:*

$$
\begin{aligned}
\left|W(\frac{j}{n}, \omega) - W(\frac{j+1}{n}, \omega)\right| &\leq \left|W(s, \omega) - W(\frac{j}{n}, \omega)\right| \\
&\quad + \left|W(s, \omega) - W(\frac{j+1}{n}, \omega)\right| \\
&\leq K\left(\left|s - \frac{j}{n}\right|^{\gamma} + \left|s - \frac{j+1}{n}\right|^{\gamma}\right) \\
&\leq \frac{M}{n^{\gamma}},
\end{aligned}
$$

para alguna constante M . *Así*

$$
\omega \in A^i_{M,n} \triangleq \left\{\left|W(\frac{j}{n}, \omega) - W(\frac{j+1}{n}, \omega)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}} \text{ para } j = i, ..., i + N - 1\right\},
$$

para algunos $1 \leq i < n$, $M \geq 1$,*y un* n *suficientemente grande. Mas aún, el conjunto de aquellos* $\omega \in \Omega$ *tal que* $W(\omega, \cdot)$ *es Hölder continuo con exponente* γ *en algún tiempo* $0 \leq s < 1$, *está contenido en*

$$\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=i}^{n} A_{M,n}^{i}.$$

Ahora, mostraremos que este evento tiene probabilidad 0. En efecto, para k *y* M, *según lo planteado anteriormente, se tiene:*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=i}^{n} A_{M,n}^{i}\right) &\leq \lim_{n\to\infty} \inf P\left(\bigcup_{i=i}^{n} A_{M,n}^{i}\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \sum_{i=1}^{n} P(A_{M,n}^{i}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf n\left(P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right)\right)^{N}. \end{aligned}$$

Puesto que las variables aleatorias $W\left(\frac{j+1}{n}\right) - W\left(\frac{j}{n}\right)$, *tienen distribución normal estandar* $N(0, \frac{1}{n})$ *y son independientes, obtenemos:*

$$\begin{aligned} P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right) &= P\left(-\frac{M}{n^{\gamma}} \leq W\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-Mn^{-\gamma}}^{Mn^{-\gamma}} f_{W(t)}\, dx, \quad t = \frac{1}{n} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{-\gamma}}^{Mn^{-\gamma}} e^{-\frac{nx^2}{2}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{1/2-\gamma}}^{Mn^{1/2-\gamma}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy, \quad y^2 = nx^2 \\ &\leq Cn^{1/2-\gamma}. \end{aligned}$$

Luego, a partir de ahí tenemos:

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=i}^{n} A_{M,n}^{i}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf nC\left[n^{1/2-\gamma}\right]^{N} = 0.$$

Siempre que $N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1$. *Como esto se cumple para todo* k, M, *entonces obtenemos:*

$$P\left(\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=i}^{n} A_{M,n}^{i}\right) = 0.$$

Ahora, si tuviésemos que $W(t, \omega)$ *fuese diferenciable en* s, *entonces* $W(t, \omega)$ *debería ser Hölder continuo (con exponente* γ*) en* s. *Sin embargo esto no es así casi ciertamente. Por otro lado, si* $W(t, \omega)$ *fuese de variación finita sobre algún subintervalo, entonces este debería ser diferenciable casi ciertamente en todo lugar.* ■

1.3. Ruido Blanco

En lo que sigue, estudiaremos la relación que existe entre el movimiento Browiniano y el ruido blanco. Para realizar esto, es necesario introducir algunas notaciones y convenciones.

Observación 1.4 *A lo largo de la literatura, casi siempre se tiene la siguiente representación del Ruido Blanco:*

$$\dot{W}(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \xi(t),$$

donde $\xi(t)$ es un Ruido blanco 1-dimensional. Por la forma como $\xi(t)$ está dado, podemos visualizar que este no existe; puesto que, casi todos los caminos aleatorios $t \to W(t,\omega)$, con $\omega \in \Omega$, son casi nunca diferenciables con respecto a $t \geq 0$ en sentido clásico. De esta forma $\xi(t)$ realmente no existe. Sin embargo, es posible dar sentido a esto, en una forma generalizada, a través de la utilización de la teoría de funciones generalizadas, y para esto, analizaremos al proceso Ruido Blanco $\xi(t)$.

En efecto, para analizar el Ruido Blando $\xi(t)$, es necesario considerar la siguiente fórmula:

$$\text{“}E\left[\xi(t)\xi(s)\right] = \delta_0(s-t)\text{”},$$

donde δ_0 es la unidad de masa en 0. Ahora veamos si esta fórmula tiene sentido.

Para ver eso, supongamos que $h > 0$, $t > 0$ fijo y sea la función, dada por:

$$\begin{aligned}
\phi_h(s) &\triangleq E\left[\left(\frac{W(t+h)-W(t)}{h}\right)\left(\frac{W(s+h)-W(s)}{h}\right)\right] \\
&= \frac{1}{h^2}\left[\begin{array}{c} E(W(t+h)W(s+h)) - E(W(t+h)W(s)) \\ -E(W(t)W(s+h)) + E(W(t)W(s)) \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{h^2}\left[((t+h)\wedge(s+h)) - ((t+h)\wedge s) - (t\wedge(s+h)) + (t\wedge h)\right]
\end{aligned}$$

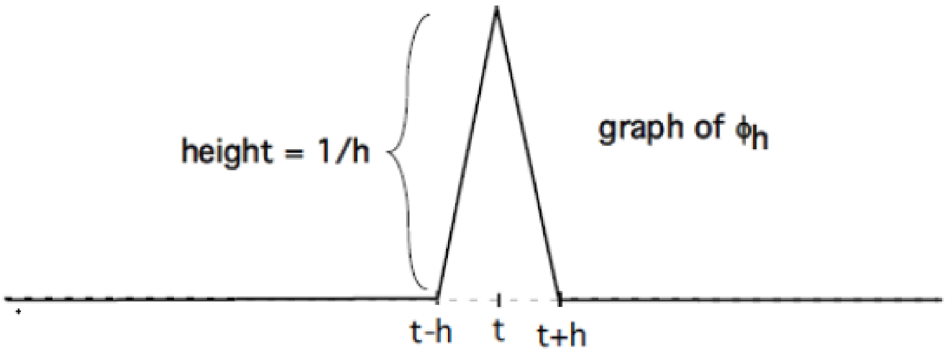

figura 1

Entonces $\phi_h(s) \to 0$ cuando $h \to 0$, $t \neq s$. Así mismo, también se cumple, según el gráfico anterior, que $\int \phi_h(s)ds = 1$, de ahí que, $\phi_h(s) \to \delta_0(s-t)$ en algún sentido, cuando $h \to 0$, donde

$$\delta_0(s-t) = \begin{cases} 0 \text{ , si } s-t \neq 0 \\ \infty \text{ , si } s-t = 0 \end{cases}$$

y además esperámos que $\phi_h(s) \to E\left[\xi(t)\xi(s)\right]$. Por lo tanto, se cumple:

$$E\left[\xi(t)\xi(s)\right] = \delta_0(s-t)$$

Observación 1.5 *Una pregunta natural con respecto al desarrollo es la siguiente:¿Por qué $\dot{W}(\cdot) = \xi(\cdot)$ es llamado Ruido Blanco?. Para dar una respuesta formal, es necesario introducir algunos preliminares dados a continuación.*

Si $X(\cdot)$ es algún proceso estocástico con valores reales y satisfaciendo $E\left[X^2(t)\right] < \infty$, para todo $t \geq 0$. Entonces definimos la función de autocorrelación de $X(\cdot)$ como siendo:

$$r(t,s) = E\left[X(t)X(s)\right] \text{ , } t,s \geq 0.$$

Luego, si $r(t,s) = c(t-s)$ para alguna función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y si $E\left[X(t)\right] = E\left[X(s)\right]$, para todo $t,s \geq 0$, entonces el proceso estocástico $X(\cdot)$ es llamado estacionario en el amplio sentido. Así, el Proceso Ruido Blanco es por definición un proceso Gaussiano, estacionario en el amplio sentido, con $c(\cdot) = \delta_0$.

Ahora, en general definimos la siguiente función:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}c(t)dt\ ,\ (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donde $f(\lambda)$ será llamada función de densidad espectral del proceso de difusón $X(\cdot)$.

En Física - Matemática, la densidad espectral de una señal está representada por una función matemática que nos informa y/o describe de cómo está distribuida la potencia o la energía (según el caso) de dicha señal sobre las distintas frecuencias de las que está formada, es decir, su espectro. La definición matemática de la densidad espectral es diferente en las diversas situaciones, dependiendo de si se trata de señales definidas a través de la energía, en cuyo caso hablamos de densidad espectral de energía, o a través de la potencia, en cuyo caso hablamos de densidad espectral de potencia. Así, para el proceso $\xi(\cdot)$, tenemos que su función de densidad estará dada por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\delta_0\, dt\ = \frac{1}{2\pi},\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces, a partir de ahí, podemos decir que todas las "frecuencias" contribuyen igualmente en la función de correlación. Cómo el punto de vista físico, por analogía, podemos decir que todos los colores contribuyen igualmente a hacer la luz blanca.

1.4. Procesos aleatorios generalizados

Un proceso aleatorio generalizado es simplemente una función generalizada aleatoria; es decir, $\Phi(\varphi)$ es un proceso estocástico usual con parámetro en el espacio K de todas las funciones de prueba $\varphi \in C^{\infty}$ con soporte compacto. Ahora, para realizar un estudio formal de los procesos aleatorios generalizados, consideremos el espacio de las funciones de prueba K. Entonces diremos que un funcional Φ está definido sobre K, si para cada elemento $\varphi(t) \in K$, existe una variable aleatoria $\Phi(\varphi)$ asociada a φ, donde $\Phi(\varphi)$ está definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

El funcional aleatorio Φ debe ser lineal, es decir, para algunos elementos φ y $\psi \in K$ y constantes α, β se tiene:

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi).$$

Finalmente, el funcional aleatorio $\Phi(\varphi)$ es continuo, si la convergencia en K de las funciones $\varphi_{k_j}(t)$ a $\varphi_j(t)$, $1 \le j \le n$, en el sentido generalizado y/o distribucional, implica

$$\lim_{k\to\infty}\ (\Phi(\varphi_{k_1}), ..., \Phi(\varphi_{k_n})) = (\Phi(\varphi_1), ..., \Phi(\varphi_n))\ ,$$

Es decir, si $(\Phi(\varphi_{k_1}), ..., \Phi(\varphi_{k_n}))$ converge en el sentido distribucional para $(\Phi(\varphi_1), ..., \Phi(\varphi_n))$.

A estas alturas del trabajo, es necesario proporcionar algunos comentarios. Siendo así como los funcionales lineales continuos sobre el espacio K son llamados funciones generalizadas, en este caso llamaremos a tal funcional lineal continuo aleatorio Φ sobre K, una función aleatoria generalizada. Ahora en el caso que K consista de funciones de una sola variable, la correspondiente función aleatoria será llamado un Proceso Aleatorio Generalizado. Por lo tanto, en el caso donde K es un espacio de funciones de varias variables, Φ es llamado un campo aleatorio generalizado.

1.4.1. Momentos de Procesos Aleatorios Generalizados: Procesos Gaussianos

Media de procesos aleatorios generalizados: Si Φ es un Proceso Aleatorio Generalizado, entonces para cada $\varphi(t) \in K$ existe una variable aleatoria $\Phi(\varphi)$. Luego asumimos que cada una de las variables aleatorias $\Phi(\varphi)$ tienen media m, la cual es continua en relación a φ. Entonces $m(\varphi)$ es un funcional continuo acotado sobre K. Ahora, en lo que sigue, llamaremos a este funcional, la media del proceso generalizado aleatorio Φ. Así la media de Φ está definida por

$$m(\varphi) = E\left[\Phi(\varphi)\right] = \int x dP(x) = \int_A x f_{\Phi(\varphi)} dx,$$

donde $P(x)$ es la función de probabilidad que $[\Phi(\varphi) < x]$, más claramente, se tiene que $f_{\Phi(\varphi)}$ es la función de densidad de la variable aleatoria $\Phi(\varphi)$.

Una de las propiedades fundamentales de la media generalizada m es que, este es lineal en relación a φ. En efecto, sean $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} m(a_1\varphi_1 + b\varphi_2) &= E\left[\Phi(a\varphi_1 + b\varphi_2)\right] \\ &= E\left[a\Phi(\varphi_1) + b\Phi(\varphi_2)\right] \\ &= aE\left[\Phi(\varphi_1)\right] + bE\left[\Phi(\varphi_2)\right] \\ &= am(\varphi_1) + bm(\varphi_2). \end{aligned}$$

A partir de ahí, podemos ver que $m(\varphi)$ es un funcional lineal sobre K; es decir, m es también una función generalizada. Así mismo, es claro que el proceso aleatorio generalizado $\Phi(\varphi) - m(\varphi)$ tiene media cero. De ahí que cada proceso aleatorio generalizado es la suma de un funcional lineal $m(\varphi)$ y un proceso aleatorio generalizado teniendo media cero (siempre que $m(\varphi)$ exista).

Por otro lado, si la media de la variable aleatoria $\Phi(\varphi)\Phi(\psi)$ existe y es continua para todo φ,ψ, entonces esta será llamada forma bilineal de correlación de Φ . De este modo, la forma bilineal de correlación $B(\varphi, \psi)$ del proceso Φ está dado por:

$$B(\varphi, \psi) = \int x_1 \cdot x_2 \, dP(x_1, x_2),$$

donde $P(x_1, x_2)$ denota la función de distribución conjunta de las variables aleatorias $\Phi(\varphi)$ y $\Phi(\psi)$.

Luego, a partir de la linealidad de $\Phi(\varphi)$, se sigue que $B(\varphi, \psi)$ es una forma bilineal. Además como la variable aleatoria $[\Phi(\varphi)]^2$ es positiva, y se tiene que $B(\varphi, \psi) = E\left[\Phi(\varphi)\Phi(\psi)\right]$ es también positiva, es decir, $B(\varphi, \varphi) \geq 0$. Esto significa que la forma bilineal de correlación $B(\varphi, \psi)$, es definida positiva.

Más aún, la forma bilineal definida por $C(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi) - m(\varphi)m(\psi)$, es definida positivo, es decir:

$$\begin{aligned} C(\varphi, \varphi) &= B(\varphi, \varphi) - m(\varphi)m(\varphi) \\ &= E\left[\Phi(\varphi)\Phi(\varphi)\right] - 2E\left[\Phi(\varphi)\right] m(\varphi) + m^2(\varphi) \\ &= E\left[|\Phi(\varphi) - m(\varphi)|^2\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Así definimos el momento de n-ésimo orden del proceso generalizado aleatorio Φ como la forma multilineal $m\left[\Phi(\varphi_1) \cdot ... \cdot \Phi(\varphi_n)\right]$, es decir, la media de las variable aleatoria $[\Phi(\varphi_1) \cdot ... \cdot \Phi(\varphi_n)]$, está dada por la siguiente expresión:

$$m\left[\Phi(\varphi_1) \cdot ... \cdot \Phi(\varphi_n)\right] = \int x_1 \cdot ... \cdot x_n \, dP(x_1 \cdot ... \cdot x_n),$$

donde P es la medida de probabilidad correspondiente a la variable aleatoria n-dimensional $(\Phi(\varphi_1), ..., \Phi(\varphi_n))$.

1.4.2. Procesos Gaussianos

Un proceso aleatorio generalizado es llamado propiamente Gaussiano, si para las funciones linealmente independientes $\varphi_1, ..., \varphi_n \in K$, la variable aleatoria $(\Phi(\varphi_1), ..., \Phi(\varphi_n))$ está distribuida Gaussianamente. Esto significa que la distribución de probabilidad del evento $(\Phi(\varphi_1), ..., \Phi(\varphi_n)) \in X$, está expresado por la fórmula:

$$P(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int_X \exp\left[-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)\right] dx, \tag{1.1}$$

donde $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ denota una matriz definida positiva no degenerada, y $(\Lambda x, x)$ denota la forma cuadrática:

$$(\Lambda x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j.$$

Teorema 1.3 *Sea Φ un proceso aleatorio generalizado propiamente Gaussiano. Entonces para algunas funciones linealmente independientes $\varphi_1, ..., \varphi_n \in K$ la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $(\Phi(\varphi_1), ..., \Phi(\varphi_n))$ tiene la forma :*

$$P(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int_X \exp\left[-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)\right] dx,$$

donde $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ *es la inversa de la matriz* $\|B(\varphi_i, \varphi_j)\|$, *y* $(\Lambda x, x)$ *denota la forma cuadrática:*

$$(\Lambda x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_i x_j.$$

Prueba. Ahora, nos limitaremos a probar solamente que la distribución de probabilidad $P(X)$ está unicamente definida por la forma bilineal de correlación $B(\varphi, \psi)$ del proceso Φ, es decir, si Φ es un proceso propiamente Gaussiano, entonces para las funciones linealmente independientes $\varphi_1, ..., \varphi_n \in K$, se tiene $\Lambda = \|B(\varphi_i, \varphi_j)\|^{-1}$. En efecto, de la forma bilineal $B(\varphi, \psi)$ se tiene por definición que:

$$B(\varphi_i, \varphi_j) = E\left[\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)\right]. \; ...(*)$$

Puesto que la variable aleatoria $\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)$ puede ser considerada como una variable aleatoria n-dimensional, cuya función de distirbución esta dada por (1.1). Entonces

$$E\left[\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)\right] = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int x_i x_j \exp\left[-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)\right] dx. \tag{1.2}$$

Así, para obtener (1.2), necesitamos aplicar la siguiente fórmula:

$$\frac{\sqrt{\det C}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int (Ax, x) \exp\left[-\frac{1}{2}(Cx, x)\right] dx = \mathrm{Tr}(AC^{-1}), \tag{1.3}$$

la cual es válida para alguna matriz definida positiva C y alguna matriz A. Como $x_i x_j = (A_{ij}x, x)$, donde A_{ij} es la matriz de cuyos elementos son nulos con excepción de los a_{ij}, los cuales son iguales a uno. A partir de ahí vemos que utilizando (1.3) la integral (1.2) es igual a $\mathrm{Tr}(A_{ij}\Lambda^{-1})$. Además; $A_{ij}\Lambda^{-1}$ es la matriz, donde sus filas se anulan con excepción de la i-ésima fila, la cual coincide con la j-ésima fila de Λ^{-1}.Más aún $\mathrm{Tr}(AC^{-1}) = \mu_{ij}$, donde los μ_{ij} son los elementos de la matriz Λ^{-1}. Así tenemos que:

$$E\left[\Phi(\varphi_i)\Phi(\varphi_j)\right] = \mathrm{Tr}(A_{ij}\Lambda^{-1}) = \mu_{ij}.$$

Luego, comparando esta última relación con $(*)$, se tiene:

$$\|B(\varphi_i, \varphi_j)\| = \left\|\mu_{ij}\right\| = \Lambda^{-1}.$$

■

En vista de que los procesos estocásticos generalizados estan relacionados con las funciones generalizadas, entonces es natural atribuirles a estos, la derivada en el sentido distribucional, como indicamos a través de la siguiente observación.

Observación 1.6 *Es necesario indicar que, así como los procesos generalizados son suceptibles de derivación, también tiene sentido que la derivada de un proceso Gaussiano aleatorio con forma bilineal de correlación* $B(\varphi, \psi)$, *la cual es nuevamente un proceso Gaussiano aleatorio con forma bilineal de correlación* $B(\varphi', \psi')$.

1.4.3. Ejemplos de procesos aleatorios generalizados

Un proceso Gaussiano para el cual la forma bilineal de correlación $B(\varphi, \psi)$ está dado por

$$B(\varphi, \psi) = \int \mathcal{B}(t, s)\varphi(t)\psi(s)dtds, \tag{1.4}$$

con $\mathcal{B}(t, s)$, el núcleo continuo definido positivo, es llamado proceso Gaussiano aleatorio continuo. Para tales procesos la distribución de probabilidad siempre existe, pero para algúnos momentos de tiempos $t_1, ..., t_n$. Está distribución viene dada por:

$$P_n(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int_X \exp\left[-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)\right] dx,$$

donde Λ denota la inversa de la matriz $B = \|B(t_i, t_j)\|$.

Reciprocamente, si Φ es un proceso aleatorio generalizado continuo y si para algunos momentos de tiempo $t_1, ..., t_n$, la distribución de probabilidad está dada por:

$$P_n(X) = \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} \int_X \exp\left[-\frac{1}{2}(\Lambda x, x)\right] dx,$$

donde $\Lambda = \|B(t_i, t_j)\|^{-1}$. Entonces la forma bilineal de correlación está dado por:

$$B(\varphi, \psi) = \int B(t, s)\varphi(t)\psi(s)dtds.$$

Proceso de Wiener visto como un proceso Gaussiano continuo

Para tener una idea de procesos generalizados Gaussianos continuos consideremos a modo de ejemplo al proceso de Wiener (Movimiento Browniano), el cual está representado por:

$$\Phi(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)W(t)dt.$$

Esto quiere decir, que el proceso $\Phi(\varphi)$, para el cual la probabilidad del evento $(\Phi(\varphi_1), ..., \Phi(\varphi_n)) \in X$, para $0 < t_1 < ... < t_n$, esta dada por:

$$P_n(X) = [(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1)...(t_n - t_{n-1})]^{-\frac{1}{2}} \int_X \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_n} + ... + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right)\right] dx_1...dx_n.$$

Ahora, cálculamos la matriz de correlación para el Movimiento Browniano. Para eso supongamos que $t < s$. Entonces se tiene que:

$$(\Lambda x, x) = \frac{x_1^2}{t} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{s - t},$$

y a partir de ahí vemos que la matriz Λ tiene la forma:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-t)t} & -\frac{1}{s-t} \\ -\frac{1}{s-t} & \frac{1}{s-t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s-t} \begin{bmatrix} \frac{s}{t} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\Lambda = \|B(t_i, t_j)\|^{-1}$, se obtiene:

$$B = \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} t & t \\ t & s \end{bmatrix} .$$

De ahí que la matriz B tiene la forma:

$$B = \begin{bmatrix} B(t,t) & B(t,s) \\ B(s,t) & B(s,s) \end{bmatrix} .$$

Entonces para $t < s$, se llega a que:

$$B(t,t) = t;\ B(t,s) = t;\ B(s,t) = t;\ B(s,s) = s.$$

Luego, se obtiene que:

$$B(t, s) = \text{mín}(t, s),$$

donde $t, s > 0$. También, si $t < 0$ o $s < 0$, entonces $B(t, s) = 0$.

Así mismo, teniendo en cuenta que, $m(\varphi) = 0$, para el Movimiento Browniano, nos queda encontrar la forma de la correlación para el Movimiento Browniano. Para conseguir esto, utilizamos la fórmula (1.4) y obtenemos:

$$\begin{aligned} B(\varphi, \psi) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \text{mín}(\tau, \upsilon)\varphi(\tau)\psi(\upsilon)d\tau d\upsilon \\ &= \int_0^\infty \varphi(\tau)\left(\int_0^t \upsilon\psi(\upsilon)d\upsilon\right) d\tau + \int_0^\infty \psi(\upsilon)\left(\int_0^s \tau\varphi(\tau)d\tau\right) d\upsilon. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Luego, tomando las funciones $\hat{\varphi}$ y $\hat{\psi}$ definidas por:

$$\hat{\varphi}(\tau) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau, \quad \hat{\psi}(\tau) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau,$$

e integrando por partes (1.5), se obtiene:

$$B(\varphi,\psi) = \int_0^\infty [\hat{\varphi}(\infty) - \hat{\varphi}(\tau)]\, \tau\psi(\tau)d\tau + \int_0^\infty \left[\hat{\psi}(\infty) - \hat{\psi}(\upsilon)\right] \upsilon\varphi(\upsilon)d\upsilon.$$

Luego, integrando nuevamente por partes y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^\infty \upsilon\varphi(\upsilon)d\upsilon = \int_0^\infty [\hat{\varphi}(\infty) - \hat{\varphi}(\upsilon)]\, d\upsilon,$$

se llega a que:

$$B(\varphi,\psi) = \int_0^\infty [\hat{\varphi}(\tau) - \hat{\varphi}(\infty)] \left[\hat{\psi}(\tau) - \hat{\psi}(\infty)\right] d\tau. \tag{1.6}$$

De este modo, encontramos la forma bilineal de correlación para el Movimiento Browniano.

Ahora consideremos la derivada del proceso de Wiener, es decir, la distribución de probabilidad de la velocidad de una partícula Browniana. Puesto que la derivada del Movimiento Browniano existe como un proceso aleatorio generalizado, entonces la forma bilineal correlación de la derivada del Movimiento Browniano está dada por $\dot{B}(\varphi,\psi) = B(\dot{\varphi},\dot{\psi})$, donde $B(\varphi,\psi)$ es definida por (1.6). Luego, a partir de que:

$$[\hat{\varphi}(\tau)]' = \int_0^t \varphi'(\tau)d\tau = \varphi(t) - \varphi(0), \quad \left[\hat{\psi}(\tau)\right]' = \int_0^t \psi'(\tau)d\tau = \psi(t) - \psi(0),$$

y, el hecho que $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen soporte compacto, $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = 0$, se obtiene:

$$\dot{B}(\varphi,\psi) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\psi(\tau)d\tau.$$

De ahí que, está fórmula puede ser escrita en la forma:

$$\dot{B}(\varphi,\psi) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(t-s)\varphi(\tau)\psi(\upsilon)d\tau d\upsilon.$$

Así se tiene que, la forma bilineal de correlación del Movimiento Browniano es la función generalizada $B(t,s) = \delta(t-s)$.

Por lo tanto, esta es la forma bilineal de correlación del Ruido Blanco. Así, el Ruido Blanco $\xi(t)$ es la derivada en el sentido generalizado y/o distribucional del proceso de Wiener (Movimiento Browniano), cuando consideramos a ambos procesos como procesos aleatorios generalizados. Entonces, a partir de ahí, se justifica la notación:

$$\xi(t) = \dot{W}(t).$$

Lo cual, equivalentemente puede ser escrito como:

$$W(t) = \int_0^t \xi(s)ds,$$

en el sentido de coincidencia de los funcionales de correlación de ambos procesos. En virtud de esto podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.11 *Un proceso Ruido Blanco Gaussiano $\xi(t)$, para $t \in \mathbb{R}$, es un proceso aleatorio generalizado Gaussiano con media $m_\xi(\varphi) = 0$ y forma bilineal de correlación:*

$$B_\xi(\varphi,\psi) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(t-s)\varphi(\tau)\psi(\upsilon)d\tau d\upsilon.$$

1.5. Procesos de difusión y ecuaciones en derivadas parciales

El proceso de difusión es uno de los varios procesos de transporte que ocurren en la naturaleza, es decir, dichos procesos involucran intercambio de masa, energía y momento entre sistemas, o dentro de un mismo sistema. La difusión fue descrita y estudiada como una teoría fenomenológica por el médico y filósofo alemán Adolf Fick, quien se baso en las observaciones realizadas por Thomas Graham sobre los gases.

La primera ley de Fick afirma que el flujo difusivo es proporcional al negativo del gradiente de la concentración de la materia, en un espacio 1 - dimensional.

$$J = -D\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}$$

La segunda ley de Fick muestra la relación existente con la ecuación de difusión.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}, \text{ ley de conservación}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \text{ ecuación de difusión}$$

Como el mismo Fick observó, su primera ley no es más que la ley de Fourier de conducción de calor (1822) y la misma que la ley de Ohm de conducción de la corriente eléctrica (1827).

Fue hasta la primera mitad del siglo XX que Lars Onsager aclaró que las relaciones anteriores forman parte de una teoría general de transporte, es decir, en el contexto de la termodinámica, Onsager estableció las relaciones recíprocas entre flujos X_i y las fuerzas generalizadas S en sistemas termodinámicos fuera del equilibrio, es así que se tiene:

$$X_i = -k\frac{\partial S}{\partial x_i}$$

1.5.1. La difusión desde el punto de vista microscópico

Históricamente, la física estadística se originó en el intento de describir las propiedades termodinámicas de la materia en términos de sus constituyentes, es así que, la termostática, es una descripción fenomenológica de las propiedades macroscópicas de sistemas en equilibrio térmico, es por ello que se manifiesta a continuación la estrecha relación existente entre la física y el movimiento Browniano.

La difusión como movimiento Browniano

Como se mencionó anteriormente, fue Robert Brown, quien se percata del interesante fenómeno que le sucede a unas partículas de polen en una solución acuosa, las cuales muestran un movimiento irregular debido a la colisión con las moléculas del liquido, este movimiento se observa de mejor forma en los siguientes gráficos:

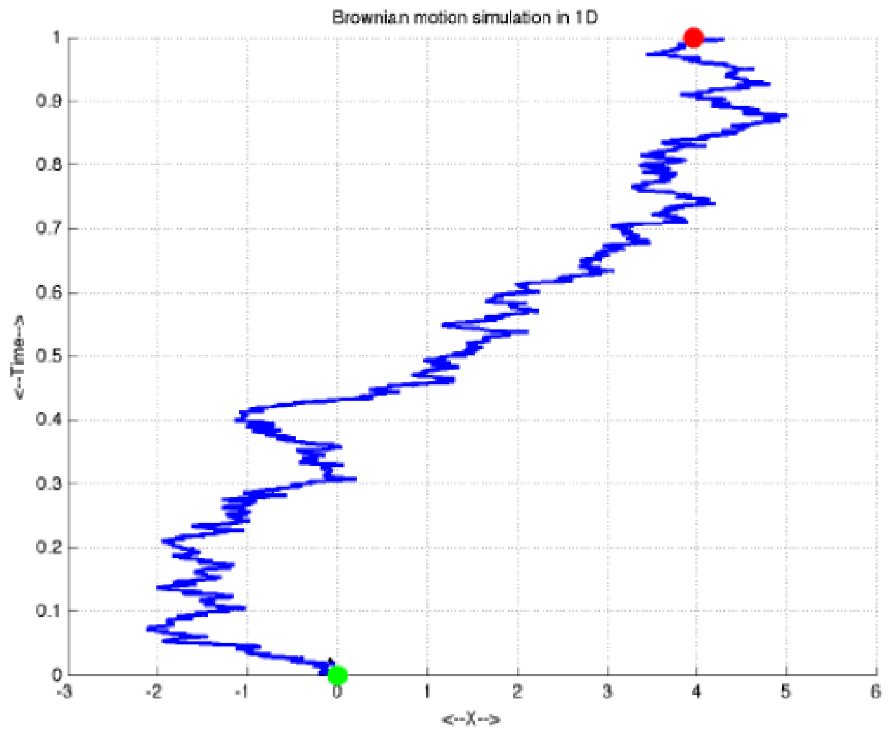

figura 2

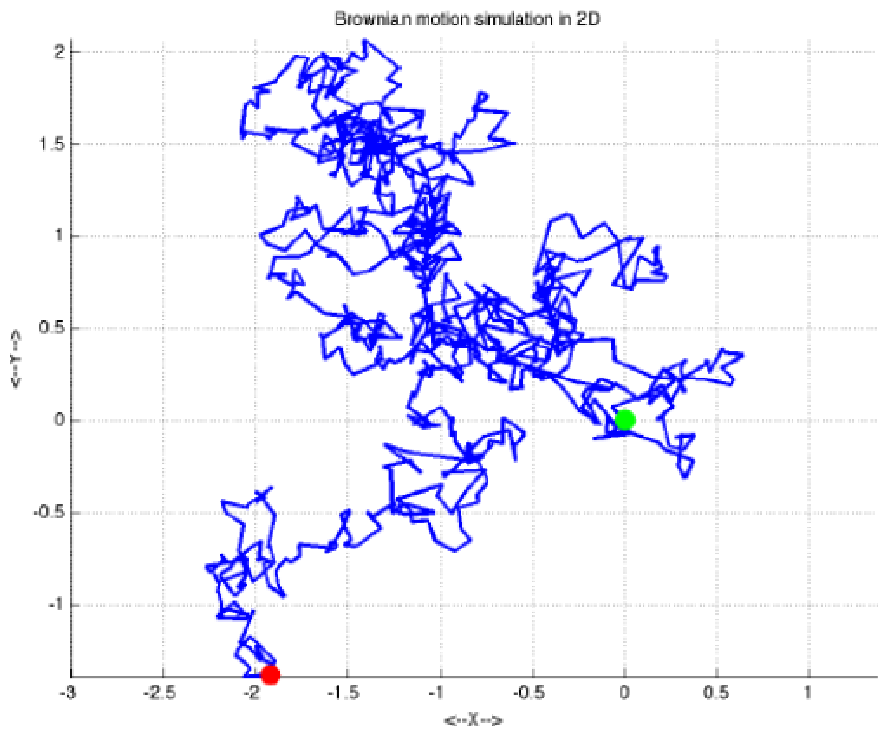

figura 3

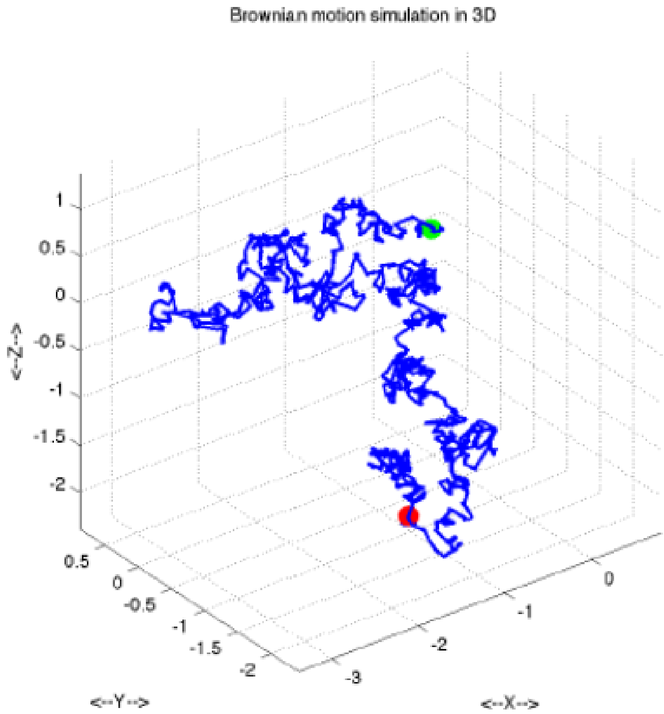

figura 4

A. Einstein, difusión y movimiento Browniano

El primer modelo cuantitativo del movimiento Browniano fue desarrollado por Albert Einstein en 1905, el año de sus grandes descubrimientos. Al parecer Einstein no conocía los estudios previos sobre el movimiento Browniano y lo predecía con su desarrollo mecánico - estadístico. En su trabajo se menciona que un proceso de difusión, se puede ver como el resultado del movimiento irregular de partículas producido por el movimiento térmico molecular, a su vez en su trabajo en mención, sus conclusiones eran sustancialmente dos:

i) Desde el punto de vista físico, Einstein relacionaba el coeficiente de difusión D con las condiciones físicas del experimento, es decir, para comprobar esta proposición es necesario hallar el coeficiente de difusión mencionado D, para ello suponemos equilibrio dinámico de partículas suspendidas irregularmente dispersas en un líquido.

Sea F una fuerza que actúa sobre las partículas en el eje x, que depende sólo de la posición y no del tiempo, sea C el número de partículas suspendidas por unidad de volumen (concentración), a su vez, las partículas tienen forma esférica y radio a, también el líquido tiene un coeficiente de viscosidad η.

Entonces se tiene, que la fuerza F le imparte una velocidad ν a cada partícula (G. Kirchhoff), es decir

$$\nu = \frac{F}{6\pi\eta a}$$

Por lo que la cantidad

$$\nu C = \frac{CF}{6\pi\eta a}$$

es el número de partículas que atraviesan una unidad de área por unidad de tiempo.

Sea de D el coeficiente de difusión de la sustancia suspendida y m la masa de una partícula suspedidad. Como resultado de la difusión, una cantidad de materia cruzará, por unidad de área y por unidad de tiempo,

$$-D\frac{\partial(mC)}{\partial x}, \text{ (gramos),}$$

$$-D\frac{\partial C}{\partial x}, \text{ (partículas).}$$

Dado que debe de haber un equilibrio dinámico, se debe tener que

$$\frac{CF}{6\pi\eta a} - D\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad (*)$$

Se completa esta ecuación con otra de equilibrio termodinámico

$$CF = \frac{\partial p}{\partial x},$$

en donde p es la presión osmótica ejercida sobre la sustancia suspendida.

La presión osmótica está relacionada con el número de partículas por unidad de volumen, por medio de la ley del gas ideal

$$p = C\frac{RT}{N},$$

donde T es la temperatura absoluta, R es la constante de los gases ideales y N es el número de Avogadro.

Ahora, calculamos el coeficiente de difusión, reemplanzado en (*) las ecuaciones planteadas, y se obtiene

$$D = \frac{RT}{N}\frac{1}{6\pi\eta a}$$

Entonces, el coeficiente de difusión de la sustancia suspendida depende (excepto por las constantes universales y la temperatura absoluta) solamente del coeficiente de viscosidad del líquido y del tamaño de las partículas suspendidas.

ii) Analizado con un carácter probabilístico, en esta parte se verificó la relación entre el movimiento irregular de las partículas suspendidas en un líquido y un proceso de difusión. Para corroborar ello fue necesario plantear las siguientes hipotesis:

- El movimiento de cada partícula es independiente de las demás.
- Los movimientos de una partícula, para diferentes intervalos de tiempo, se deben considerar procesos mutuamente independientes (dichos intervalos de tiempo no son demasiado pequeños)

Luego, se supone que hay n partículas suspendidas en un líquido, en un intervalo de tiempo τ, las coordenadas x de las partículas se incrementarán por una cantidad Δ (distinta para cada partícula, + o - sobre el eje x), teniendo en cuenta que para tiempos mayores que τ, los movimientos de las partículas se consideran independientes y que el valor de Δ está regido por la ley de probabilidad.

Sea dn el número de partículas que experimentan desplazamiento entre Δ y $\Delta + d\Delta$ en un tiempo τ; es decir,

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta,$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1$$

La función $\phi \neq 0$ para valores muy pequeños de Δ y satisface la condición

$$\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$$

Se procedio a analizar, como depende el coeficiente de difusión de la función ϕ, de acuerdo con la hipótesis de que el número de partículas por unidad de volumen C, sólo depende de x y t.

Sea $C = f(x,t)$ la concentración o número de partículas por unidad de volumen, luego calculando la distribución de partículas al tiempo $t+\tau$ a partir del tiempo t. Por la definición de la función $\phi(\Delta)$, es simple obtener el número de partículas localizadas al tiempo $t+\tau$, entre dos planos perpendiculares al eje x, de coordenadas x y $x+\Delta$:

$$f(x,t+\tau)dx = dx\int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=\infty} f(x+\Delta,t)\phi(\Delta)d\Delta$$

Ahora, dado que τ es muy pequeño, se obtiene

$$f(x, t+\tau) = f(x,t) + \tau \frac{\partial f}{\partial t}$$

Además, podemos expandir en potencias de Δ a la función $f(x+\Delta, t)$; es decir

$$f(x+\Delta, t) = f(x,t) + \Delta \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + ...$$

Siendo así, colocamos la última expansión bajo el signo de la integral, tomando en cuenta que sólo valores muy pequeños de Δ contribuyen en la misma integral. Luego se obtiene que

$$f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}\tau = f\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta\phi(\Delta) d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2!}\phi(\Delta) d\Delta + ...$$

Luego, a partir del lado derecho de la expresión se anulan los términos impares, ya que $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$; mientras que los términos pares van siendo menores respecto a sus precedentes. Además, consideramos que la densidad de probabilidad ϕ buscamos que debe estar normalizada; es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta) d\Delta = 1,$$

así, definiendo

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta) d\Delta = D$$

y, tomando sólo en cuenta los primeros dos términos pares del lado derecho, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

La cual se trata de la conocida ecuación diferencial de difusión, y reconocemos que D es el coeficiente de difusión. Como consecuencia, $f(x,t)$ es la densidad de una distribución Normal, de media 0 y desviación típica proporcional a $\sqrt{t}$:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Es por esta razón es que existe una relación interesante entre los procesos de difusión y las ecuaciones en derivadas parciales. Así, en general, los procesos de difusión permiten dar interpretaciones probabilísticas de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Ejemplo 1.1 *Consideremos el siguiente ejemplo. Si* B_t *es una movimiento Browniano, y* f *es una función continua con crecimiento polinomial, entonces la función*

$$u(t,x) = E(f(B_t + x))$$

satiface la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con condición inicial $u(0,x) = f(x)$. *Esto es debido a que podemos escribir*

$$E(f(B_t + x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy,$$

y la función $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ *para cada* y *fijo, satisface la ecuación del calor, mencionada anteriormente. La función* $x \longmapsto u(t,x)$ *representa la distribución de temperaturas en una barra de longitud infinita, suponiendo un perfil inicial de temperaturas dado por la función* $f(x)$.

Las conclusiones de Einstein fueron a su vez corroboradas experimentalmente por el físico francés Jean Baptiste Perrin, entre los años1905 y 1911, que consiguió con ello una determinación experimental del número de Avogadro y la constante de Boltzman, que coincidían con los resultados obtenidos por los otros métodos. Posteriormente, estos trabajos, fueron los que le permitieron a Perrin obtener el premio Nobel en 1926, en la cual confirmaron que la descripción de Einstein del movimiento Browniano era sustancialmente correcta. Posteriormente modelos físicos más sofisticados fueron desarrollados por físicos de tanto renombre como Foker, Plank, Ornstein y Uhlenbeck.

1.6. El problema de la martingala

En esta sección se buscará explicar de forma sencilla el problema de la martingala, para luego ver como posteriormente estos resultados serán de mucha utilidad en el desarrollo del presente trabajo. El problema de la martingala fue estudiado y desarrollado inicialmente por Stroock y Varadhan, en su libro "Multidimensinal Difussion Processes"desarrollado en el año 1969, fueron quienes estudiaron un determinado proceso de difusión $\{X_t\}_{t\in T}$, definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, y con ciertas restricciones sobre sus coeficientes de deriva y difusión.

Para dar inicio al estudio del problema de la martingala correspondiente al proceso de difusión X_t, es necesario definir el espacio donde se encuentra la solución, usualmente utilizaremos los parámetros $T = [0; \infty\rangle$. De ahí que sí fijamos el tiempo t, se tiene la siguiente variable aleatoria

$$\omega \to X_t(\omega); \quad \omega \in \Omega$$

Por otra lado, fijando $\omega \in \Omega$, se obtiene a la función

$$t \to X_t(\omega); \; t \in T,$$

la cual representa el camino aleatorio del proceso de difusión $X_t(\cdot)$. Es usual considerar a "t" como el tiempo y "ω" una partícula individual, es decir, $X_t(\omega)$ representa la posición en un determinado tiempo "t" de una partícula "ω". Algunas veces es conveniente utilizar la notación de $X(t, \omega)$ en vez de $X_t(\omega)$, pues de este modo podemos considerar el proceso estocástico como una función de dos variables:

$$(t, \omega) \to X(t, \omega)$$

Definida del conjunto en el espacio euclidiano, es decir: $T \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Así podemos identificar cada ω con la función $t \to X_t(\omega)$ definida de T en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, se puede considerar a Ω como un subconjunto del espacio $\tilde{\Omega} = (\mathbb{R}^n)^T$ de todas las funciones continuas definidas de T en $\mathbb{R}^n$. Entonces la σ - álgebra $\mathcal{F}$ estará contenida en la σ - álgebra $\mathcal{B}$ generada por los conjuntos de la forma.

$$\{\omega; \; \omega(t_1) \in F_1, ..., \omega(t_k) \in F_k\}, \quad F_i \subset \mathbb{R}^n \text{ es un conjunto de Borel o Boreliano}$$

Así, $\mathcal{B}$ es la σ - álgebra de Borel sobre $\tilde{\Omega}$, sí $T = [0; \infty\rangle$ y $\tilde{\Omega}$ está dada por la topología producto.

Aunque también se puede considerar el punto de vista de que un proceso estocástico está definido por una medida probabilidad Q sobre el espacio de medida $((\mathbb{R}^n)^T, \mathcal{B})$.

La distribución finito dimensional del proceso $X = \{X_t\}_{t\in T}$ son las medidas $\mu_{t_1,...,t_k}$ definidas sobre $\mathbb{R}^{nk}$, $k = 1; 2; ...$

$$\mu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times F_2 \times ... \times F_k) = Q[X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k]; \; t_i \in T,$$

donde $F_1, F_2, ..., F_k$ denotan a los Borelianos en $\mathbb{R}^n$. Luego, la familia de todas las distribuciones finito dimensionales determinan muchas propiedades importantes del proceso estocásticos X.

Reciprocamente, dada una familia de medidas de probabilidad $\{\nu_{t_1,...,t_k}; \; k \in \mathbb{N}; \; t_i \in T\}$, definidas sobre $\mathbb{R}^{nk}$, entonces es posible construir un proceso estocástico $Y = \{Y_t\}_{t\in T}$, teniendo a $\nu_{t_1,...,t_k}$ como sus distribuciones finito dimensionales. Una de las principales propiedades del famoso teorema de Kolmogorov es que se puede proveer de una medida de probabilidad $\{\nu_{t_1,...,t_k}\}$ satisfaciendo la segunda condición natural del mencionado teorema.

Teorema 1.4 *(teorema de extesión de Kolmogorov). Para todo* $t_1, ..., t_k \in T$, $k \in \mathbb{N}$, *sea* $\nu_{t_1,...,t_k}$ *las medidas de probabilidad sobre* $\mathbb{R}^{nk}$ *, es decir,*

$$\nu_{t_{\sigma(1)},...,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1,...,t_k}(F_{\sigma(1)} \times ... \times F_{\sigma(k)})$$

para todas las permutaciones σ *sobre* $\{1; 2; ...; k\}$ *y*

$$\nu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times ... \times F_k) = \nu_{t_1,...,t_k,t_{k+1},...,t_{k+m}}(F_1 \times ... \times F_k \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$*, donde el conjunto de la mano derecha tiene un total de* $k+m$ *factores. Entonces existe un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ *y un proceso estocástico* $\{X_t\}$ *sobre* Ω, $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, es decir*

$$\nu_{t_1,\dots,t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = Q\left[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k\right],$$

para todo $t_i \in T$, $k \in \mathbb{N}$ *y todo conjunto de Borel* F_i.

Una referencia para la prueba de este teorema, puede ser encontrada en el libro de Karatas-Shreve (Brownian Motion and Stochastic Calculus), sección 2.2. y que muestra a su vez como puede ser construido un movimiento Browniano $W(t)$.

De está forma, podemos formular el problema de la martingala:

Tomemos la ecuación integral estocástica $X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s)$, $0 \le t < \infty$, como un proceso de difusión sobre $\mathbb{R}^n$, donde el proceso $\{W(t),\ 0 \le t < \infty\}$ es un Movimiento Browniano n-dimensional sobre algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, Q^{x_0})$, donde Q^{x_0} es la medida de probabilidad de X_t empezando en x_0, con coeficientes de deriva μ y difusión σ, la cual será estudiada con detenimiento en las secciones posteriores, para esto utilizaremos la notación $X(t) = X_t$, la cual ya fue aclarada anteriormente. Siendo así, sea $\mathcal{A}$ el generador infinitesimal correspondiente al proceso de difusión $X(\cdot)$, que también será formulado en las secciones posteriores del presente trabajo, y $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ (funciones con soporte compacto y con derivadas parciales continuas de orden menor que dos), por lo que se tiene:

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t \mathcal{A}f(X_s)ds + \int_0^t \nabla f^T(X_s)\sigma(X_s)dW_s \tag{1.7}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y "∇" es el gradiente. Luego, se define

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_r)dr \tag{1.8}$$

Entonces, dado que los procesos de Itô (procesos de difusión), son martingalas (con respecto a la σ - álgebra $\{\mathcal{F}_t\}$ generada por $\{W_s; s \le t\}$); se tiene que para $s > t$:

$$E^x[M_s|\mathcal{F}_t] = M_t$$

De ahí, resulta que:

$$E^x[M_s|\mathcal{M}_t] = E^x[E^x[M_s|\mathcal{F}_t]|\mathcal{M}_t] = E^x[M_t|\mathcal{M}_t] = M_t$$

puesto que M_t es $\mathcal{M}_t$ - medible, con $\mathcal{M}_t$ la σ-álgebra generada por $\{X_s; s \le t\}$. Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 1.5 *Si* X_t *es un proceso de difusión en* $\mathbb{R}^n$ *con generador de difusión* $\mathcal{A}$*, entonces para toda* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ *el proceso*

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_r)dr$$

es una martingala con respecto a $\{\mathcal{M}_t\}$.

Ahora, si identificamos a cada $\omega \in \Omega$ con la función

$$\omega_t = \omega(t) = X_t^{x_0}(\omega),$$

entonces debido a lo desarrollado en la sección precedente; se obtiene una correpondencia biunívoca entre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{M}, Q^{x_0})$ y el espacio $((\mathbb{R}^n)^{[0;\infty)}, \mathcal{B}, \tilde{Q}^{x_0})$, donde $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel sobre $(\mathbb{R}^n)^{[0;\infty)}$. De ahí que utilizando la ley de probabilidad de $X_t^{x_0}$ y el teorema de Kolmogorov, se obtiene la medida de probabiliad $\tilde{Q}^{x_0}$ definida sobre $\mathcal{B}$. Por lo tanto, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Si* $\tilde{Q}^{x_0}$ *es la medida de probabilidad sobre* $\mathcal{B}$ *inducida por la medida de probabilidad* Q^{x_0} *de un proceso de difusión* X_t*, entonces para todo* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ *el proceso*

$$\begin{aligned} M_t &= f(X_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(X_r)dr \\ M_t &= f(\omega_t) - \int_0^t \mathcal{A}f(\omega_r)dr \ ;\ \omega \in (\mathbb{R}^n)^{[0;\infty)} \end{aligned}$$

es una $\tilde{Q}^{x_0}$ *- martingala con respecto a la* σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}_t$ *sobre* $(\mathbb{R}^n)^{[0;\infty)}$, $t \ge 0$.

Así, podemos interpretar al problema de la martingala, de la siguiente manera: Lo que se busca es encontrar una medida de probabilidad $\tilde{Q}^{x_0}$, con la cual M_t es una martingala con respecto a la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_t$ sobre $(\mathbb{R}^n)^{[0;\infty)}$ y con respecto al proceso de difusión X_t. Así, cual al resolver el problema de la martingala se estaría encontrando una solución débil a la ecuación integral estocástica $X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s)$, $0 \leq t < \infty$, lo cual ayuda en mucho al desarrollo del presente trabajo.

En otras palabras, la medida de probabilidad $\tilde{Q}^{x_0}$ resuelve el problema de la martingala para el operador diferencial $\mathcal{A}$, referida en el siguiente sentido:

Definición 1.12 *Sea* L *un operador diferencial semi-eliptico de la forma:*

$$L = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i *son funciones Borel-medibles localmente acotadas sobre* $\mathbb{R}^n$*. Entonces decimos que una medida de probabilidad* $\tilde{P}^{x_0}$ *definida sobre* $\left((\mathbb{R}^n)^{[0,\infty)}, \mathcal{B}\right)$, *resuelve el problema de la martingala para* L *(empezando en* x_0*) si el proceso*

$$M_t = f(\omega_t) - \int_0^t Lf(\omega_r)dr \ , \ M_0 = f(x) \quad \tilde{P}^{x_0} - \text{c.c} \ \textit{(casi ciertamente)}$$

es una $\tilde{P}^{x_0}$*−martingala con respecto a* $\mathcal{B}_t$*, para toda función* $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$*.*

Luego, diremos que el problema de la martingala es bien de buen comportado si existe una única medida de probabilidad $\tilde{P}^{x_0}$ que resuelva el problema de la martingala.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

En este capítulo, nos dedicaremos a estudiar el movimiento de partículas Brownianas, su comportamiento, lo cual constituye un interesante fenómeno aleatorio que ocurre con el movimiento de partículas Brownianas, que será planteado y estudiado en las siguientes secciones.

2.1. Formulación del problema a estudiar: Movimiento de partículas Brownianas

Para iniciar este estudio del movimiento de las partículas Brownianas, consideraremos la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(X(t)) + \sigma(X(t))\xi(t), \; 0 \leq t < \infty, \tag{2.1}$$

donde $\xi(\cdot)$ es el proceso de "Ruido Blanco", n-dimensional.

La ecuación (2.1) dada en su forma diferencial es:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))\xi(t)dt,$$

y como analizamos en el capítulo anterior, el proceso estocástico ruido blanco, satisface una relación que involucra la noción de derivada, es decir, se tiene:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \xi(t).$$

Esto es un proceso estocástico generalizado, obtenido a partir del movimiento Browniano, como la derivada en el sentido generalizado de este último. Una forma equivalente de escribirlo será:

$$dW(t) = \xi(t)dt,$$

donde el proceso $\{W(t), \; 0 \leq t < \infty\}$ es un Movimiento Browniano n-dimensional sobre algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces, a partir de ahí, se tiene la ecuación diferencial en su forma:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t).$$

Luego, la ecuación (2.1) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, toma su forma integral estocástica y esta dada por:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s), 0 \leq t < \infty, \tag{2.2}$$

Estas funciones μ, σ son llamadas coeficientes de deriva y difusión, respectivamente. Posteriormente, a lo largo de este capítulo, colocaremos algunas restricciones a estos coeficientes para poder lograr uno de nuestro propósito, el cual consiste en aproximar un generador infinitesimal asociado a la ecuación diferencial estocástica (2.2). No está demás indicar que la solución de está ecuación, será un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$, con trayectorias continuas y adaptado a la filtración Browniana inducido por el movimiento Browniano. Los procesos solución de la ecuación (2.2) se denominan Procesos de Difusión.

2.2. Coeficientes de deriva y difusión asociado al Proceso de Difusión

En esta sección ilustraremos formas explícitas para los coeficientes de deriva y de difusión, los cuales serán denotados por $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, de forma que podamos utilizar dichos coeficientes, para aproximar el generador infinitesimal asociado al proceso de difusión.

2.2.1. Forma de los coeficientes de deriva y difusión asociados al Proceso de Difusión

Dada la ecuación diferencial estocástica (2.2), y suponiendo que $\mathbb{R}^n$ está particionado en una unión finita de poliedros disjuntos. Entonces a partir de ahí, nos dedicaremos a analizar y desarrollar el coeficiente de deriva $\mu(\cdot)$ en el caso que esté sea acotado y medible. Así mismo, también colocaremos condiciones suficientes sobre el coeficiente o matriz de difusión $\sigma(\cdot)$ para que este sea acotado, continuo por partes y tenga la forma:

$$\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \sigma_\nu(x)\mathbf{1}_{\mathcal{R}_\nu} \equiv \sigma_{p(x)}(x);\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Aquí $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ es la función indicadora, el conjunto $\{\mathcal{R}_\nu\}_\nu^m$ forma una partición de $\mathbb{R}^n$ para algún $m \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\nu \bigcap \mathcal{R}_k &= \emptyset, \text{ para } \nu \neq k, \text{ y} \\ \bigcup_{\nu=1}^{m} \mathcal{R}_\nu &= \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Luego, a partir de ahí, definimos la función $p(x)$ de la siguiente manera:

$$p : \mathbb{R}^n \to \{1, ..., m\},$$

donde $p(x) = k$, para $k = 1, ..., m$, la cual satisaface que $x \in \mathcal{R}_{p(x)}$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Por está razón, asumiremos que cada $\mathcal{R}_\nu$ es un poliedro n-dimensional para $\nu = 1, ..., m$, y que las matrices $\{\sigma_\nu(\cdot)\}_{\nu=1}^m$ de orden $(n \times n)$ son definidas positivas y no singulares en toda parte. Luego, por la forma que tiene la función $\sigma(x)$ en (2.3), podemos ver que la matriz inversa $\sigma^{-1}(x)$ existe y tiene la forma:

$$\sigma^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_\nu^{-1}(x)\mathbf{1}_{\mathcal{R}_\nu}$$

2.2.2. Soluciones fuertes y débiles de las ecuaciones diferenciales estocásticas

Para estudiar soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas del tipo (2.1), es necesario entender lo que significa una solución, ya sea en el sentido fuerte o en el sentido débil. Estas nociones serán detalladas a lo largo de esta sección, centrándonos más en las soluciones débiles, las cuales nos serán de mucha utilidad en desarrollo de este trabajo. Para dar inicio a esto, es necesario introducir algunas notaciones y convenciones.

Solución fuerte:

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un movimiento Browniano n-dimensional $W = \left\{W(t), \mathcal{F}_t^W; 0 \leq t \leq \infty\right\}$, donde $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(t), 0 \leq t \leq \infty)$ es la $\sigma-$álgebra generada por W. Luego, dada la distribución:

$$\mu(\Gamma) = P[\xi \in \Gamma];\ \Gamma \in \beta(\mathbb{R}^n),$$

donde ξ es una variable aleatoria tomando valores en $\mathbb{R}^n$, independiente de $\mathcal{F}_t^W$.

Definición 2.1 *Una solución fuerte de (2.1), sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *con respecto al movimiento Browniano W y con condición inicial* ξ, *es un proceso estocástico* $X = \{X(t); 0 \leq t < \infty\}$, *con caminos aleatorios continuos y que además cumple las siguientes propiedades:*

- X *es adaptado a la filtración* $\mathcal{F}_t^W$, es decir, que para $t \geq 0$, la varible aleatoria $X(t)$ es $\mathcal{F}_t^W-$medible.

- $P[X_0 = \xi] = 1$,
- $P\left[\int_0^t \{|\mu_i(X(s)) + \sigma_i^2(X(s))|\} ds < \infty\right] = 1$, *se cumple para* $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq t < \infty$, *y*
- *Satisface una versión integral de la ecuación diferencial estocástica (2.1) dada por:*

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s),\ 0 \leq t < \infty,$$

donde la igualdad se cumple casi ciertamente.

Definición 2.2 *Sean el vector de deriva* $\mu(\cdot)$ *y la matriz de difusión* $\sigma(\cdot)$. *Supongamos que,* W *es un movimiento Browniano n - dimensional sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ξ *es un vector aleatorio n - dimensional independiente, es decir, que sus entradas tienen la misma distribución de probabilidad,* $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(t), 0 \leq t \leq \infty)$ *es la* σ*-álgebra generada por* W, *y* X, $\tilde{X}$ *son dos soluciones fuertes de (2.1) relativas a* W *con condición inicial* ξ, *entonces*

$$P\left[X(t) = \tilde{X}(t); 0 \leq t < \infty\right] = 1$$

Bajo estas condiciones, diremos que la unicidad fuerte se cumple para el par (μ, σ).

Solución débil:

A diferencia de las soluciones fuertes que son construidas a partir de la condición inicial, de la filtración generada por esta y el movimiento Browniano; la existencia de soluciones débiles son determinadas a partir de un par de procesos estocásticos $(X(t), W(t), \mathcal{F}_t)$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dadas las funciones μ y σ, de modo que este proceso $(X(t))_{t\geq 0}$ satisface la ecuación diferencial estocástica determinada por μ, σ, $W(t)$ y $\mathcal{F}_t$. Siendo así, ahora precisamos algunos de estos comentarios a través de la siguiente:

Definición 2.3 *Una solución débil de (2.1) es una tripleta* (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* $\{\mathcal{F}_t\}$ *donde:*

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es un espacio de probabilidad y* $\{\mathcal{F}_t\}$ *es una filtración de sub* $\sigma-$álgebras de $\mathcal{F}_t$, satisfaciendo la condición usual (continua por la derecha y $\mathcal{F}_0$ contiene a todos los eventos $P - \text{despreciables}$ en $\mathcal{F}$) ,
- $X = \{X(t), \{\mathcal{F}_t\}_t ; 0 \leq t < \infty\}$ *es un proceso adaptado continuo con estados en* $\mathbb{R}^n$, $W = \{W(t), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ *es un movimiento Browniano n-dimensional , y*
- *Además, la tercera condición y cuarta condicion de la definición 2.1, son satisfechas.*

Nociones y formulaciones de unicidad:

Una vez definido los dos tipos de soluciones: fuerte y débil, es necesario definir la unicidad de tales soluciones. Existen dos conceptos de unicidad razonables, que pueden ser asociados con las soluciones débiles. El primero es una generalización de la unicidad fuerte definido anteriormente, el segundo es aquel que utilizaremos más adelante, el cual es dado a través de la unicidad de las distribuciones finito dimensionales.

Noción 1: Suponga que (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\{\mathcal{F}_t\}$ y $(\tilde{X}, W)$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\left\{\tilde{\mathcal{F}}_t\right\}$ son soluciones débiles de (2.1) con un movimiento Browniano W común, definidos sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ común, y con valor inicial común. Es decir, $P\left[X_0 = \tilde{X}_0\right] = 1$, y los dos procesos son indistinguibles, es decir, $P\left[X_t = \tilde{X}_t; \forall\ 0 \leq t < \infty\right] = 1$. Entonces, esto nos permite afirmar de que la unicidad por caminos se cumple para la ecuación (2.1).

Noción 2: Diremos que la solución para (2.1) es única en el sentido de la distribución de probabilidad si se cumple que, para dos soluciones débiles (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\{\mathcal{F}_t\}$ *y* $(\tilde{X}, \tilde{W})$, $\left(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}, \tilde{P}\right)$ y $\{\mathcal{F}_t\}$, con la misma distribución inicial, es decir,

$$P[X_0 \in \Gamma] = \tilde{P}\left[\tilde{X}_0 \in \Gamma\right],\ \forall\ \Gamma \in \beta(\mathbb{R}^n),$$

los dos procesos X, $\tilde{X}$ tienen la misma distribución.

2.3. Transformación de Girsanov y proceso de reducción de la ecuación diferencial estocástica

En esta sección desarrollaremos una aplicación del teorema de Girsanov, el cual nos será de mucha utilidad para cambiar el coeficiente de deriva asociado al problema (2.2), mediante un adecuado cambio de medida de probabilidad. Para conseguir esto, analizaremos primero la variación de los cambios de probabilidad a través de las densidades correspondientes.

Si en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ consideramos una variable aleatoria $L \geq 0$ con esperanza uno, entonces,

$$Q(A) = E(\mathbf{1}_A L),$$

define una nueva medida de probabilidad. Es necesario indicar que la esperanza de L sea igual a uno, lo cual nos permite garantizar que:

$$Q(\Omega) = E(L) = 1.$$

En este caso,diremos que L es la densidad de Q con respecto a P y escribiremos esto formalmente como:

$$\frac{dQ}{dP} = L.$$

conocida como la derivada de Radon - Nikodym.

Luego, la esperanza de una variable aleatoria X con respecto al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ es calculada de la siguiente manera:

$$E_Q(X) = E(XL).$$

lo cual nos permite representar una de las medidas como la integral de una función de densidad, pero con respecto a la otra medida.

También es necesario recordar la continuidad absoluta de las medidas de probabilidad de una con respecto de la otra. Es decir, la probabilidad Q es absolutamente continua respecto de P, si dado $A \in \mathcal{F}$ con $P(A) = 0$, entonces $Q(A) = 0$.

Luego, podemos decir que si la variable aleatoria L es estrictamente positiva, entonces las probabilidades P y Q son equivalentes (mutuamente absolutamente continuas), es decir, $P(A) = 0$ si y solamente si $Q(A) = 0$.

2.3.1. Teorema de Girsanov

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un movimiento Browniano n-dimensional

$$W = \left\{ W_t = (W_t^{(1)}, ..., W_t^{(n)}), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty \right\},$$

definido sobre este espacio de probabilidad, con $P[W_0 = 0] = 1$. Asumimos que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ satisface la condición usual (continua por la derecha y $\mathcal{F}_0$ contiene a todos los eventos P-despreciables en $\mathcal{F}$). Luego, sea $X = \left\{ X_t = (X_t^{(1)}, ..., X_t^{(n)}), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty \right\}$ un proceso estocástico adaptado, satisfaciendo la relación:

$$P\left[\int_0^T \left(X_t^{(i)} \right)^2 dt < \infty \right] = 1; \; 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq T < \infty$$

Entonces para cada i, la integral estocástica $I^{W^{(i)}}(X^{(i)})$ está definida y pertenece a $\mathcal{M}^{c,loc}$ (martingalas locales, continuas por la derecha). A partir de ahí, definimos el proceso estocástico:

$$Z_t(X) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \int_0^t X_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_s\|^2 \, ds \right] \tag{2.4}$$

Luego, bajo ciertas condiciones $Z(X)$ será en realidad una martingala, y así $E[Z_t(X)] = 1$; $0 \leq t < \infty$. En este caso, para cada $0 \leq T < \infty$, podemos definir, una medida de probabilidad $\tilde{P}_T$ sobre $\mathcal{F}_T$ dada por:

$$\tilde{P}_T(A) = E[\mathbf{1}_A Z_T(X)]; \quad A \in \mathcal{F}_T$$

Siendo así, a partir de estos preliminares podemos enunciar el siguiente teorema de Girsanov.

Teorema 2.1 *(Girsanov(1960), Cameron Martin(1944)). Asumimos que* $Z(X)$ *definido por (2.4) es una martingala. Definimos un proceso* $\tilde{W} = \left\{ \tilde{W}_t = (\tilde{W}_t^{(1)}, ..., \tilde{W}_t^{(n)}), \mathcal{A}_t; 0 \leq t < \infty \right\}$ *dado por:*

$$\tilde{W}_t^{(i)} = W_t^{(i)} - \int_0^t X_s^{(i)} ds; \;\; 1 \leq i \leq n, 0 \leq t < \infty.$$

Entonces, para cada $T \in [0, \infty)$ fijo, *el proceso* $\tilde{W} = \left\{ \tilde{W}_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < T \right\}$ *es un movimiento Browniano n-dimensional definido sobre* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}_T\right)$.

Una referencia para la prueba de este teorema, y así como la justificación de que $Z(X)$ es una martingala, puede ser encontrada en el libro de Karatas-Shreve (Brownian Motion and Stochastic Calculus), sección 3.5.

2.3.2. Transformación de Girsanov

Una vez formulado el enunciado del teorema de Girsanov, este será utilizado para cambiar la medida probabilidad, a través de la definición de un nuevo proceso, lo cual nos ayudará a eliminar el coeficiente de deriva $\mu(\cdot)$, y por lo tanto obtener la ecuación diferencial estocástica (2.2), sin la parte que contiene al coeficiente de deriva, es decir, teniendo solo en cuenta $\mu(\cdot) \equiv 0$.

Ahora definimos un proceso n-dimensional $\xi(\cdot)$ dado por:

$$\xi(t) = \sigma^{-1}(X(t))\mu(X(t)); \;\; 0 \leq t < \infty.$$

Luego, por la naturaleza de las funciones medibles $\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ dadas anteriormente, se tiene que $\xi(\cdot)$ es continua por la derecha, y más aún es acotada. Entonces definimos el siguiente proceso estocástico exponencial:

$$\eta(t) = \exp\left[\int_0^t \langle \xi(s), dW(s) \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \|\xi(s)\|^2 \, ds\right]; \;\; 0 \leq t < \infty,$$

donde $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ es la norma euclidiana y $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ es el producto interno usual de dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Así mismo, denotemos por:

$$\zeta(t) = \int_0^t \langle \xi(s), dW(s) \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \|\xi(s)\|^2 \, ds,$$

de ahí que, se obtiene que $\eta(t)$ satisface la siguiente ecuación integral estocástica:

$$\eta(t) = 1 + \sum_{i=1}^n \int_0^t \eta(s)\xi_i(s) dW_i(s).$$

En efecto, utilizando la expresión $\zeta(t)$ en su forma diferencial, tenemos que:

$$d\zeta(t) = \langle \xi(t), dW(t) \rangle - \frac{1}{2}\|\xi(t)\|^2 \, dt,$$

Luego, elevando al cuadrado la expresión anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} (d\zeta(t))^2 &= \left(\langle \xi(t), dW(t) \rangle - \frac{1}{2}\|\xi(t)\|^2 \, dt\right)^2 \\ &= (\langle \xi(t), dW(t) \rangle)^2 - \langle \xi(t), dW(t) \rangle \|\xi(t)\|^2 \, dt + \frac{1}{4}\|\xi(t)\|^4 (dt)^2, \end{aligned}$$

así, teniendo en cuenta la siguiente tabla de multiplicación, se tiene:

$\cdot$	dt	$dW(t)$	$d\tilde{W}(t)$
dt	0	0	0
$dW(t)$	0	dt	0
$d\tilde{W}(t)$	0	0	dt

donde W y $\tilde{W}$ son dos movimientos Brownianos independientes. Además se obtiene la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
(d\zeta(t))^2 &= (\langle \xi(t), dW(t)\rangle)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)dW_i(t)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2(t)dW_i^2(t) + 2\sum_{i,j<n;i\neq j} \xi_i(t)\xi_j(t)dW_i(t)dW_j(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2(t)dt.
\end{aligned}
$$

Luego, utilizando la fórmula de Itô en la siguiente forma:

$$df(\zeta(t)) = f'(\zeta(t))d\zeta(t) + \frac{1}{2}f''(\zeta(t))(d\zeta(t))^2,$$

pero con $f(x) = e^x$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
d\eta(t) &= \eta(t)\left(\langle \xi(t), dW(t)\rangle - \frac{1}{2}\|\xi(t)\|^2\, dt\right) + \frac{1}{2}\eta(t)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2(t)dt \\
&= \eta(t)\langle \xi(t), dW(t)\rangle - \frac{1}{2}\eta(t)\|\xi(t)\|^2\, dt + \frac{1}{2}\eta(t)\|\xi(t)\|^2\, dt \\
&= \eta(t)\langle \xi(t), dW(t)\rangle.
\end{aligned}
$$

Así mismo, teniendo en cuenta la condición inicial $\eta(0) = 1$, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\eta(t) &= 1 + \int_0^t \eta(s)\langle \xi(s), dW(s)\rangle \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \eta(s)\xi_i(s)dW_i(s).
\end{aligned}
$$

Luego, $\eta(t)$ será una martingala si esta cumple con la condición de Novikov, es decir, si satisface:

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|\xi(s)\|^2\, ds\right)\right] < \infty; \quad 0 \leq T < \infty,$$

Así, teniendo en cuenta que $\eta(t)$ es una martingala continua, se sigue del teorema de Girsanov que:

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}(t) &= W(t) + \int_0^t \xi(s)ds \\
&= W(t) + \int_0^t \sigma^{-1}(X(s))\mu(X(s))ds, \quad \mathcal{A}_t; \quad 0 \leq t < \infty,
\end{aligned}
$$

el cual es un movimiento Browniano n-dimensional, con respecto a la nueva medida de probabilidad Q, que es equivalente a P, es decir, P y Q son equivalentes si son absolutamente continuas mutuamente, esto es si para $A \in \mathcal{F}$ la $P(A) = 0$ si y solamente si $Q(A) = 0$, y satisface:

$$Q(A) = E^P\left[\mathbf{1}_A\eta(T)\right],$$

para $A \in \mathcal{F}_T$, $0 \leq T < \infty$.

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$dW(t) = d\tilde{W}(t) - \sigma^{-1}(X(t))\mu(X(t))dt,$$

y reemplazando la expresión anterior en (2.2), se tiene:

$$\begin{aligned}X(t) &= x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))dW(s)\\ &= x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))\left(d\tilde{W}(s) - \sigma^{-1}(X(s))\mu(X(s))ds\right)\\ &= x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))d\tilde{W}(s) - \int_0^t \sigma(X(s))\sigma^{-1}(X(s))\mu(X(s))ds\\ &= x_0 + \int_0^t \mu(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s))d\tilde{W}(s) - \int_0^t \mu(X(s))ds\\ &= x_0 + \int_0^t \sigma(X(s))d\tilde{W}(s); \quad 0 \le t < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en lo que se tiene, solo será necesario trabajar con la ecuación integral estocástica:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(X(s))d\tilde{W}(s); \quad 0 \le t < \infty, \tag{2.5}$$

definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

El procedimiento realizado anteriormente, y más que todo, el resultado obtenido por este cálculo, nos da una gran ventaja, ya que la ecuación diferencial estocástica obtenida es más sencilla de estudiar, que la dada inicialmente, es decir, esto es una forma de reducción del problema planteado inicialmente. En la siguiente sección se vizualizara como esto es de mucha importancia, para el desarrollo del presente trabajo.

2.4. Generador infinitesimal asociado al proceso de difusión

Consideremos un proceso de difusión $\{X(t); 0 \le t < \infty\}$ que satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),$$

donde W es un movimiento Browniano n-dimensional con $\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$, siendo los coeficientes dados en las secciones anteriores. Entonces, a partir de ahi, podemos asociar a un proceso de difusión un operador diferencial de segundo orden. Dicho operador, denotado por $\mathcal{A}$, en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales estocásticas es denominado generador infinitesimal asociado al proceso de difusión, y está definido por:

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(\sigma\sigma')_{ik}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}.$$

En esta expresión la función $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable con derivadas parciales continuas (es decir, de clase C^2). Como, en la sección anterior llegamos a tener que $\mu(\cdot) \equiv 0$, entonces el generador infinitesimal $\mathcal{A}$ de este proceso, definido sobre el espacio C^2, está dado por:

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2[\varphi(x)]}{\partial x_i \partial x_k}; \quad \varphi \in C^2, \tag{2.6}$$

donde

$$\begin{aligned}a_{ik}(x) &= \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(x)\sigma_{kj}(x),\\ A(x) &= \{a_{ij}(x)\}_{1\le i,j\le n}\,;\ x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Aquí $\sigma_{ij}(\cdot)$ es la (i,j)-ésima entrada de la matriz $\sigma(\cdot)$ para $1 \le i, j \le n$. Por la hipótesis de definida positiva uniformemente sobre las matrices $\sigma_\nu(\cdot)$, $\nu = 1, ..., m$ definidas en (2.3), el operador $\mathcal{A}$ es uniformemente elíptico, en el siguiente sentido:

Sea D un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y asumimos que los coeficientes de deriva y difusión son los dados anteriormente, entonces se tiene:

Definición 2.4 *El operador $\mathcal{A}$ es llamado elíptico en el punto $x \in \mathbb{R}^n$ si:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\beta_i\beta_k > 0; \ \forall\ \beta \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es elíptico para cada punto de D, podemos decir que $\mathcal{A}$ es elíptico en D; si existe un número $\delta > 0$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\beta_i\beta_k \geq \delta \left\|\beta\right\|^2 ; \ \forall\ x \in D,\ \ \beta \in \mathbb{R}^n ,$$

se tiene que $\mathcal{A}$ es uniformemente elíptico en D.

2.5. Formulación del problema a estudiar

Ahora, observamos el siguiente fenómeno interesante, que se obtiene al aplicar ciertas condiciones sobre $\sigma(\cdot)$, de modo que para, $n \geq 3$, se obtenga:

$$\begin{aligned} P_{x_0}\left(X_i(t) = X_j(t) = X_k(t),\ \text{para algún } t > 0\right) &= 0 \ \text{ o} \\ P_{x_0}\left(X_i(t) = X_j(t) = X_k(t), \text{infinitamente después}\right) &= 1;\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.7}$$

para algunos $1 \leq i < j < k \leq n$. Aquí, P_{x_0} es la solución al problema de la matingala correspondiente a (2.5).

Seguidamente, expliquemos lo que se muestra en este fenómeno y para eso tomemos el proceso estocástico n-dimensional

$$X(t) = (X_t^1, X_t^2, ..., X_t^i, ..., X_t^j, ..., X_t^k, ..., X_t^n)$$

de modo que, tomando $\omega \in \Omega$, se obtenga

$$X_\cdot(\omega) = (X_\cdot^1(\omega), X_\cdot^2(\omega), ..., X_\cdot^i(\omega), ..., X_\cdot^j(\omega), ..., X_\cdot^k(\omega), ..., X_\cdot^n(\omega)).$$

Esto es un camino aleatorio n-dimensional correspondiente al proceso estocástico $X(t)$, definido en el campo de los números reales y tomando valores en $\mathbb{R}^n$; donde cada coordenada también es un camino aleatorio 1-dimensional, definido en los reales positivos, tomando valores en $\mathbb{R}$. Así, el problema anterior puede ser entendido de la siguiente forma.

Sea $\omega \in \left[X_t^i = X_t^j = X_t^k;\ \text{para algún } t > 0\right]$, esto es, si y solo si,

$$X_t^i(\omega) = X_t^j(\omega) = X_t^k(\omega).$$

Luego tomando la probabilidad de ocurrencia de este evento, se tiene que puede ocurrir la colisión de estas tres partículas en estudio con un cierto grado de probabilidad, para algún tiempo determinado, o caso contrario si no ocurre dicha colisión o si esta ocurre en un tiempo dado infinitamente después, lo cual se muestra en (2.7). Esto muestra, que los caminos aleatorios de estas tres partículas Brownianas pueden colisionar en un determinado tiempo " t ". Por lo tanto, este es el fenómeno que estudiaremos en las secciones posteriores, a través de formulaciones equivalentes a (2.7).

2.6. Formulación equivalente al problema a través de tiempos de parada

Como se observó en la sección anterior, el análisis de este interesante fenómeno, ocurre con el movimiento de tres partículas Brownianas. Así, en esta sección mostraremos ciertos problemas que tratan de explicar el mismo fenómeno, a través de encontrar una forma equivalente a la mostrada en (2.4), utilizando tiempos de parada.

Sin perdida de generalidad, tomaremos el caso para $i = 1, j = 2, k = 3$ para el problema mostrado en (2.7). Luego, definimos los vectores d_1, d_2, d_3 de dimensión $(n \times 1)$, con la finalidad de extraer la información de la matriz de difusión $\sigma(\cdot)$, definida sobre la tripleta (X_1, X_2, X_3). Entonces d_1, d_2, d_3 estan dados por:

$$\begin{aligned} d_1 &= (1, -1, 0, 0, ..., 0)' \\ d_2 &= (0, 1, -1, 0, ..., 0)' \\ d_3 &= (-1, 0, 1, 0, ..., 0)' \end{aligned}$$

donde "$'$" es la transpuesta.

Así, definimos la matriz $D = (d_1, d_2, d_3)$ de orden $(n \times 3)$ para simplificar notación. Entonces, el problema dado en (2.7) puede ser representado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P_{x_0}\left(s^2(X(t)) = 0,\ \textit{para algún } t > 0\right) &= 0 \ \text{ o} \\ P_{x_0}\left(s^2(X(t)) = 0, \textit{infinitamente después}\right) &= 1, \ \ x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde la función continua $s^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, esta dada por:

$$\begin{aligned} s^2(x) &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \\ &= d_1' x x' d_1 + d_2' x x' d_2 + d_3' x x' d_3 \\ &= x' D D' x; \ \text{para } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Esta es una función medible dada como la suma del cuadrado de las distancias para las tres partículas Brownianas, las cuales estan siendo analizadas. Así, estudiaremos el comportamiento de los procesos continuos no negativos $\left\{s^2(X(t));\ 0 \le t < \infty\right\}$, alrededor de su conjunto nulo.

$$\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ s(x) = 0\}. \tag{2.10}$$

2.6.1. Tiempos de parada a utilizar

Supongamos que $x_0 \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}$ esta fijo, tomenos $k_0 > 1$, un entero positivo tal que

$$k^{-k} < s(X(0) = s(x_0) < k,$$

se cumpla para cada $k \ge k_0$. Luego, definimos los siguientes tiempos de parada:

$$\begin{aligned} S_k &= \inf\{t > 0 : s(X(t)) = k\} \\ T_k &= \inf\left\{t > 0 : s(X(t)) = k^{-k}\right\}; k \ge k_0 \\ T &= \inf\{t > 0 : s(X(t)) = 0\} = \lim_{k\to\infty} T_k. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora realizamos las siguientes observaciones que nos serán de utilidad en el desarrollo del capítulo.

Observación 2.1 *Se puede observar que el caso tomado en (2.7) y (2.8) puede ser considerado de la siguiente manera:*

$$P_{x_0}(T < \infty) = 0 \ \ \textit{o} \ \ P_{x_0}(T < \infty) = 1;\ x_0 \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}. \tag{2.12}$$

En efecto, se tiene que $T = \inf\{t > 0 : s(X(t)) = 0\}$ es un tiempo de parada. Luego, analizemos el evento $[T < \infty]$; para esto tomemos $\omega \in [T < \infty]$, es decir, $T(\omega) < \infty$, esto es, si y solamente si,

$$\inf\{t > 0 : s(X(t, \omega)) = 0\}$$

Así, tomemos $T > 0$, tal que $s(X(T, \omega)) = 0$, donde $T = \inf\{t > 0 : s(X(t, \omega)) = 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} s^2(X(T, \omega)) &= (X_T^1(\omega) - X_T^2(\omega))^2 + (X_T^2(\omega) - X_T^3(\omega))^2 + (X_T^3(\omega) - X_T^2(\omega))^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene el problema equivalente a (2.7) y (2.8), para $T = \inf\{t > 0 : s(X(t, \omega)) = 0\}$, dado como se muestra en (2.12), es decir:

$$P_{x_0}(T < \infty) = 0 \text{ o } P_{x_0}(T < \infty) = 1; x_0 \in \mathbb{R}^n / \mathcal{Z}.$$

Observación 2.2 *Podemos mostrar que*

$$P_{x_0}(S_k < \infty) = 1 = P_{x_0}(\lim_{l\to\infty} S_l = \infty);\ \forall k \ge k_0. \tag{2.13}$$

En efecto, tenemos que probar que

$$[S_k < \infty] = \left[\lim_{l\to\infty} S_l = \infty\right]$$

Por eso, tomemos $\omega \in [S_k < \infty]$, esto es, si y solo si; $S_k(\omega) < \infty, \forall\, k \geq k_0$. De aquí, a medida que $S_k(\omega)$ crezca, el tiempo a su vez también crece, por lo tanto $\omega \in [\lim_{l\to\infty} S_l = \infty]$. Ahora, tomemos $\omega \in [\lim_{l\to\infty} S_l = \infty]$, esto es, si y solamente si $\lim_{l\to\infty} S_l(\omega) = \infty$, esto es, si se da que $\forall\ A > 0, \exists\ k > 0$ tal que si $k \geq k_0 \Rightarrow S_k(\omega) > A$. Como $S_k(\omega) = \inf\{t > 0 : s(X(t,\omega)) = k\}$, por la definición de infimo, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$S_k(\omega) < t' < S_k(\omega) + \varepsilon$$

Luego, tomemos $\varepsilon = S_k(\omega) - A > 0$.Entonces

$$\begin{aligned} S_k(\omega) &< t' < S_k(\omega) + \varepsilon, \forall k \geq k_0 \\ S_k(\omega) &< t' < S_k(\omega) + S_k(\omega) - A \\ S_k(\omega) &< t' < 2S_k(\omega) - A, \forall k \geq k_0 \end{aligned}$$

De aquí, tomamos $t' > S_k(\omega)$, y como t' es finito, tenemos que $S_k(\omega) < \infty$, entonces

$$\omega \in [S_k < \infty]$$

Así, concluimos que $[S_k < \infty] = [\lim_{l\to\infty} S_l = \infty]$

Ahora, probemos que $P_{x_0}[S_k < \infty] = 1$. Notemos que

$$[S_k < \infty] \cup [S_k = \infty] = \tilde{\Omega}.$$

Luego, tomando probabilidad a este evento, tenemos:

$$P_{x_0}[S_k < \infty] + P_{x_0}[S_k = \infty] = P_{x_0}(\tilde{\Omega}) = 1$$

Solo resta mostrar que $P_{x_0}[S_k = \infty] = 0$. En efecto, tomemos $\omega \in [S_k = \infty] \iff S_k(\omega) = \infty$, entonces definamos la siguiente sucesión:

$$[S_k > n] \supset [S_k > n+1] \supset ...$$

de modo que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [S_k > n] = [S_k = \infty]$$

Entonces,

$$P_{x_0}[S_k = \infty] = \lim_{n\to+\infty} P_{x_0}[S_k > n]$$

Así, tomemos $\omega \in [S_k > n]$, esto es, si y solamente si $S_k(\omega) > n \iff S_k(\omega) = \infty$. Entonces, se tiene que no existe $t' > 0$ tal que

$$s(X(t',\omega)) = k.$$

Por lo tanto, $\omega \in \{\phi\}$. Siendo así,

$$\begin{aligned} P_{x_0}[S_k = \infty] &= \lim_{n\to+\infty} P_{x_0}[S_k > n] \\ &= 0 \end{aligned}$$

De ahi que:

$$P_{x_0}[S_k < \infty] = 1$$

Por lo tanto, se tiene que $P_{x_0}(S_k < \infty) = 1 = P_{x_0}(\lim_{l\to\infty} S_l = \infty); \forall\ k \geq k_0$

2.7. Formulación equivalente al problema a través de una forma integral

En esta sección buscaremos un problema equivalente a (2.7), utilizando herramientas del calculo estocástico, que nos serán de utilidad para establecer este problema equivalente, que será determinado mediante relaciones con una forma integral.

Para encontrar este problema equivalente a (2.7), primero definimos la función $f : \mathbb{R}^n - \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sum_{i=1}^{3} d_i^{\prime}\sigma(x)\sigma^{\prime}(x)d_i}{\sum_{i=1}^{3} d_i^{\prime}xx^{\prime}d_i} - \frac{2\left\|\sum_{i=1}^{3} d_i^{\prime}x\sigma^{\prime}(x)d_i\right\|^2}{\left(\sum_{i=1}^{3} d_i^{\prime}xx^{\prime}d_i\right)^2} \\ &= \frac{\mathrm{traza}\,(D^{\prime}A(x)D)}{x^{\prime}DD^{\prime}x} - \frac{2xDD^{\prime}A(x)DD^{\prime}x}{(x^{\prime}DD^{\prime}x)^2};\ x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Luego, retomando el proceso de difusión:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \sigma(X(s))d\tilde{W}(s),\ 0 \leq t < \infty, \tag{2.15}$$

donde $\tilde{W} = W$ por simplicidad en la notación, es un movimiento Browniano n-dimensional y $\sigma(\cdot)$ es el coeficiente de difusión del proceso.

Así, como se tiene que $X(\cdot)$, es un proceso de difusión n-dimensional, es decir,

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), ..., X_i(t), ..., X_j(t), ..., X_n(t)),$$

tomemos las coordenadas i, j del proceso de difusión para $i \neq j$, entonces por (2.15) se tiene:

$$\begin{aligned} X_i(t) &= x_0 + \sum_{l=1}^{n}\int_0^t \sigma_{il}(X(s))dW_l(s); \\ X_j(t) &= x_0 + \sum_{l=1}^{n}\int_0^t \sigma_{jl}(X(s))dW_l(s). \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones son equivalentes a su forma diferencial, dada por:

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= \sum_{l=1}^{n} \sigma_{il}(X(t))dW_l(t); \\ dX_j(t) &= \sum_{l=1}^{n} \sigma_{jl}(X(t))dW_l(t). \end{aligned}$$

Así, restando estas dos ecuaciones obtenemos:

$$d(X_i(t) - X_j(t)) = \sum_{l=1}^{n}(\sigma_{il}(X(t)) - \sigma_{jl}(X(t)))dW_l(t);\quad 1 \leq i, j \leq 3. \tag{2.16}$$

2.7.1. Una aplicación de la formula de Itô y del teorema opcional del muestreo

Una aplicación muy útil, dentro del análisis estocástico, es la formula de Itô, que en esta ocasión utilizaremos para obtener nuestro propósito. Entonces para vizualizar mejor, aplicamos la formula de Itô, para $Y_t = g(t, u) = \log u$, donde $u = s^2(x)$, y mostraremos mediante esta formula que:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial g(s,u)}{\partial s}ds + \int_0^t \frac{\partial g(s,u)}{\partial u}du + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g(s,u)}{\partial u^2}(du)^2.$$

Luego, aplicando a nuestra función, se tiene:

$$\begin{aligned} \log(s^2(X(t))) &= \log(s^2(x_0)) + \int_0^t \frac{\partial \log(s^2(X(s)))}{\partial s}ds + \int_0^t \frac{\partial \log(s^2(X(s)))}{\partial(s^2(X(s)))}d(s^2(X(s))) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \log(s^2(X(s)))}{\partial(s^2(X(s)))^2}(d(s^2(X(s))))^2 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t,u)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial g(t,u)}{\partial u} &= \frac{u^{\prime}}{u}, \\ \frac{\partial^2 g(t,u)}{\partial u^2} &= \frac{-(u^{\prime})^2}{u^2}. \end{aligned}$$

Reemplazando y utilizando (2.16), obtenemos:

$$\log(s^2(X(t))) = \log(s^2(x_0)) + M(t) + \int_0^t f(X(s))ds, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.17}$$

donde $f(\cdot)$ es la función definida en (2.14) y $M(\cdot)$ es una martingala local definida por:

$$M(t) = \int_0^t \left\langle \frac{2}{s^2(x)} \sum_{i=1}^{3} \sigma'(x) d_i d_i' x \,|_{x=X(s)}, dW(s) \right\rangle. \tag{2.18}$$

Luego, definimos una sucesión de tiempos de parada

$$V_k^{(N)} = S_k \wedge T_k \wedge N, \tag{2.19}$$

para $k \ge k_0$ y $N \in \mathbb{N}$ fijo. Así, aplicando esperanza con respecto a la medida de probabilidad P_{x_0} a (2.14), obtenemos:

$$E_{x_o}\left[\log(s^2(X(V_k^{(N)})))\right] = E_{x_o}\left[\log(s^2(x_0))\right] + E_{x_o}\left[\int_0^{V_k^{(N)}} f(X(t))dt\right] + E_{x_o}\left[M(V_k^{(N)})\right].$$

Luego, desarrollando el logaritmo y tomando como hipótesis que $E_{x_o}\left[M(V_k^{(N)})\right] = 0$, posteriormente se verificará este hecho, obtenemos:

$$E_{x_o}\left[\log(s(X(V_k^{(N)})))\right] = \log(s(x_0)) + \frac{1}{2} E_{x_o}\left[\int_0^{V_k^{(N)}} f(X(t))dt\right]. \tag{2.20}$$

Para probar que $E_{x_o}\left[M(V_k^{(N)})\right] = 0$, es necesario formular el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *(teorema del muestreo opcional). Sea* $\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ *una submartingala continua por la derecha con último elemento* X_∞, *y sea* $S \le T$ *dos tiempos opcionales de la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}$, *tenemos:*

$$E(X_T \mid \mathcal{F}_{S+}) \ge X_S \quad P - c.c.$$

Si S *es un tiempo de parada, entonces* $\mathcal{F}_S$ *puede reemplazar a* $\mathcal{F}_{S+}$. *En particular,* $E[X_T] \ge E[X_0]$, *y para una martingala con un último elemento, tenemos* $E[X_T] = E[X_0]$.

Una referencia para la prueba de este teorema, puede ser encontrada en el libro Karatzas-Shreve (Brownian Motion and Stochastic Calculus), sección 1.3.

Observación 2.3 *Probar que* $E_{x_o}\left[M(V_k^{(N)})\right] = 0$.

En efecto, en realidad a lo largo del proceso, $X(\cdot)$ permanece dentro del dominio tubular compacto:

$$\mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : k^{-k} < s(x) < k\right\}; \quad k \ge k_0,$$

Luego, tomamos $t < S_k \wedge T_k$, para obtener lo siguiente:

$$\frac{2\left\|\sum_{i=1}^{3} \sigma'(x) d_i d_i' x\right\|}{s^2(x)} = \frac{2x' D(D' A(x) D) D' x}{x' D D' x} < \infty, \tag{2.21}$$

esto es debido a que $\mathcal{D}_k$ es compacto.

Así, aplicando el teorema opcional del muestreo y utilizando (2.21), obtenemos:

$$E_{x_o}\left[M(V_k^{(N)})\right] = E_{x_o}[M(0)] = 0, \ \text{para cada } k \ge k_0, \ N \in \mathbb{N}.$$

2.7.2. Obtención de la forma integral equivalente

Para obtener una formulación equivalente del problema, recurriremos a una forma integral, es necesario comprobar la siguiente proposición.

Proposición 2.1 *Se cumple la siguiente igualdad:*

$$\begin{aligned} E_{x_o}\left[\log(s(X(V_k^{(N)})))\right] &= -k(\log k)P_{x_o}(T_k \le S_k \wedge N) + (\log k)P_{x_o}(S_k \le T_k \wedge N) \\ &\quad + E_{x_0}(\log(s(X(S_k \wedge T_k \wedge N)))\mathbf{1}_{\{N \le T_k \wedge S_k\}}). \end{aligned}$$

Prueba. i)Primero probemos que:

$$\Omega = [T_k \le S_k \wedge N] \cup [S_k \le T_k \wedge N] \cup [N \le T_k \wedge S_k]$$

Esto será probado por doble inclusión. La inclusión de $([T_k \le S_k \wedge N] \cup [S_k \le T_k \wedge N] \cup [N \le T_k \wedge S_k]) \subset \Omega$ es trivial, solo resta mostrar que

$$\Omega \subset [T_k \le S_k \wedge N] \cup [S_k \le T_k \wedge N] \cup [N \le T_k \wedge S_k]$$

En efecto, tomemos $\omega \in \Omega$, entonces se tiene ω satisface:

$$X(t,\omega) = x_0 + \int_0^t \sigma(X(s,\omega))dW(s,\omega),\ 0 \le t < \infty,$$

de aquí, aplicando s a la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned} s(X(\tilde{t},\omega)) &= \sqrt{(X_{\tilde{t}}^1(\omega) - X_{\tilde{t}}^2(\omega))^2 + (X_{\tilde{t}}^2(\omega) - X_{\tilde{t}}^3(\omega))^2 + (X_{\tilde{t}}^3(\omega) - X_{\tilde{t}}^2(\omega))^2} \\ &= k \ne 0;\ \forall k \ge k_0\ ,\ \tilde{t} = \inf\{t > 0 : s(X(t)) = k\} \quad \text{y} \quad S_k = V_k^{(N)} \end{aligned}$$

pues $X(\cdot) \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}$. Luego $\omega \in [S_k \le T_k \wedge N]$, implica que $\omega \in [T_k \le S_k \wedge N] \cup [S_k \le T_k \wedge N] \cup [N \le T_k \wedge S_k]$.

También se cumple que estos eventos son disjuntos, es decir,

$$[T_k \le S_k \wedge N] \cap [S_k \le T_k \wedge N] \cap [N \le T_k \wedge S_k] = \phi$$

En efecto, supongamos que $[T_k \le S_k \wedge N] \cap [S_k \le T_k \wedge N] \cap [N \le T_k \wedge S_k] \ne \phi$. Entonces $\omega \in [S_k \le T_k \wedge N]$ y $\omega \in [T_k \le S_k \wedge N]$, es decir,

$$S_k(\omega) \le T_k(\omega) \wedge N \quad \text{y} \quad T_k(\omega) \le S_k(\omega) \wedge N$$

De aquí, se tiene

$$s(X(T_k)) = k^{-k} \quad \text{y} \quad s(X(S_k)) = k \qquad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Por lo tanto, $[T_k \le S_k \wedge N] \cap [S_k \le T_k \wedge N] \cap [N \le T_k \wedge S_k] = \phi$

ii) Teniendo en cuenta lo anterior y como $V_k^{(N)} = S_k \wedge T_k \wedge N$, pueden ocurrir los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} S_k \wedge T_k \wedge N &= S_k \Rightarrow S_k \le T_k \wedge N \\ S_k \wedge T_k \wedge N &= T_k \Rightarrow T_k \le S_k \wedge N \\ S_k \wedge T_k \wedge N &= N \Rightarrow N \le S_k \wedge T_k \end{aligned}$$

Luego, se tiene:

$$\begin{aligned} E_{x_o}\left[\log(s(X(V_k^{(N)})))\right] &= E_{x_o}\left[\log(s(X(V_k^{(N)})))\mathbf{1}_{\{T_k \le S_k \wedge N\}}\right] \\ &\quad + E_{x_o}\left[\log(s(X(V_k^{(N)})))\mathbf{1}_{\{S_k \le T_k \wedge N\}}\right] \\ &\quad + E_{x_o}\left[\log(s(X(V_k^{(N)})))\mathbf{1}_{\{N \le S_k \wedge T_k\}}\right] \\ &= -k(\log k)P_{x_o}(T_k \le S_k \wedge N) + (\log k)P_{x_o}(S_k \le T_k \wedge N) \\ &\quad + E_{x_0}(\log(s(X(S_k \wedge T_k \wedge N)))\mathbf{1}_{\{N \le T_k \wedge S_k\}}) \end{aligned}$$

■

Observación 2.4 *Se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}
\bigcup_{N=1}^{\infty}[T_k \le S_k \wedge N] &= [T_k \le S_k]\,, \\
\bigcup_{N=1}^{\infty}[S_k \le T_k \wedge N] &= [S_k \le T_k]\,, \\
\bigcup_{N=1}^{\infty}[N \le T_k \wedge S_k] &= [N \le T_k] \quad o \quad \bigcup_{N=1}^{\infty}[N \le T_k \wedge S_k] = [N \le S_k]\ .
\end{aligned}$$

En efecto, probaremos que $\bigcup_{N=1}^{\infty}[T_k \le S_k \wedge N] = [T_k \le S_k]$, las demas relaciones se prueban de manera similar. La inclusión $\bigcup_{N=1}^{\infty}[T_k \le S_k \wedge N] \subset [T_k \le S_k]$ es trivial, resta mostrar $\bigcup_{N=1}^{\infty}[T_k \le S_k \wedge N] \supset [T_k \le S_k]$.

En efecto, tomemos $\omega \in [T_k \le S_k]$, esto se cumple si y solamente si,

$$T_k(\omega) \le S_k(\omega) < \infty$$

Entonces, existe un $N > S_k(\omega)$ tal que $S_k(\omega) \wedge N = S_k(\omega)$.De ahí que se obtiene que:

$$T_k(\omega) \le S_k(\omega) \wedge N$$

Por lo tanto, $\omega \in \bigcup_{N=1}^{\infty}[T_k \le S_k \wedge N]$,como queriamos demostrar.

Luego, sustituyendo la proposición (2.1), utilizando la observación (2.2), el teorema de convergencia dominada, y haciendo tender $N \to \infty$, obtenemos:

$$P_{x_0}(T_k \le S_k) = \frac{1}{k}P_{x_0}(S_k \le T_k) - \frac{\log s(x_0)}{k\log k} - \frac{E_{x_o}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f(X(t))dt\right]}{2k\log k}.$$

El primer y segundo miembro a mano derecha de esta identidad tienden a cero cuando $k \to \infty$, así de (2.12) y (2.13) se tiene que:

$$P_{x_0}(T < \infty) = \lim_{k\to\infty} P_{x_0}(T_k \le S_k) = -\lim_{k\to\infty}\frac{E_{x_o}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f(X(t))dt\right]}{2k\log k}.$$

Por lo tanto, utilizando (2.9), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{E_{x_o}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f(X(t))dt\right]}{2k\log k} &= 0 \quad \text{o}, \\
\lim_{k\to\infty}\frac{E_{x_o}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f(X(t))dt\right]}{2k\log k} &= -1,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

De este modo se ha encontrado, otra formulación del problema equivalente a (2.7),(2.8) y (2.12), a través de una forma integral, así como de muchas herramientas estudiadas en el cálculo estocástico, sin embargo es necesario estudiar el comportamiento de este fenómeno cuando $k \to \infty$, para el proceso de difusión $X(\cdot)$, donde $f(\cdot)$ está definido por (2.14), y este estudio será realizado posteriormente.

Ejemplo 2.1 *Para el movimiento Browniano n-dimensional estandar, es decir,* $\sigma(\cdot) = I_n$, $n \ge 3$, *donde* I_n *es la matriz identidad, se tiene que* $f(\cdot) = 0$ *en (2.14); el límite en (2.22) es igual a cero en este caso. Así, se tiene que no existe triple colisión a lo largo de los caminos aleatorios de las particulas Brownianas. Por lo tanto, se tiene:*

$$P_{x_0}(T < \infty) = 0$$

Observación 2.5 *La función* $f(\cdot)$ *definida en (2.14) puede estar acotada sobre el dominio tubular* $\mathcal{D}_k$*, dado por*

$$|f(x)| \leq \frac{1}{s^2(x)} \left| \mathrm{traza}(D'A(x)D) - \frac{2x'D(D'A(x)D)D'x}{x'DD'x} \right|; \quad x \in \mathcal{D}_k$$

La función matricial $A(x)$ *es acotado, y así el término dentro de* $|\cdot|$ *es como en (2.21); sin embargo, el término* $s^{-2}(x)$ *explota en el orden* $O(k^{2k})$ *para* $x \in \mathcal{D}_k$*, cuando* $k \to \infty$*. Luego, por un resultado encontrado en el lema (5.1) del artículo de Bass, R. F. y Pardoux, É. (Uniqueness for difusions with piecewise constant coefficients); se tiene que*

$$E_{x_0}[S_k] \leq ck^2$$

para alguna constante c*. Estos límites no se comportan bien en (2.22), como aquellas estimaciones dadas que crecen más rapido* $k \log k$ *en (2.22).*

Según lo mostrado, necesitamos elaborar más métodos y herramientas para decidir cuando las condiciones sobre (2.22), se cumplirán. Así, desarrollaremos tales herramientas en el siguiente capítulo, usando ecuaciones diferenciales parciales y calculo estocástico.

Capítulo 3

Colisión de partículas Brownianas

En este último capítulo se formulará y verificará el problema de la colisión de partículas Brownianas en un determinado instante, manteniendo las condiciones propuestas a lo largo del presente trabajo, de modo que esto nos permita obtener la mencionada colisión. Para ello será necesario de algunos resultados básicos, que serán desarrollados en el presente capítulo, con el fin de comprobar nuestro propósito planteado acerca de la triple colisión de partículas Brownianas.

3.1. Ecuaciones diferenciales parciales y el problema de Dirichlet

Consideremos un operador diferencial parcial $\tilde{\mathbf{A}}$ estrictamente elíptico de segundo orden, definido por:

$$\tilde{\mathbf{A}}\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2 [\varphi(x)]}{\partial x_i \partial x_j}; \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

donde $\tilde{a}_{ij}(\cdot)$ es acotado y pertenece a la clase de las funciones $\alpha - \text{Hölder}$ continuas $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, con $0 < \alpha < 1$. Luego, definimos las matriz de orden $(n \times n)$:

$$\tilde{A}(x) = \{\tilde{a}_{ij}(x)\}_{1 \leq i,j \leq n} \,; \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

así como también una C^α-función $g : \mathbb{R}^n - \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x) = \frac{\mathit{traza}\left(D'\tilde{A}(x)D\right)}{x'DD'x} - \frac{2xDD'\tilde{A}(x)DD'x}{(x'DD'x)^2}; \; x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}. \tag{3.3}$$

y su versión truncada $g_r(\cdot)$, para $r \geq 2$, definida por:

$$g_r(x) = g(x)\zeta_r(x), \; x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z},$$

donde $\zeta_r(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una C^∞-función, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, definida por:

$$\zeta_r(x) = \begin{cases} 1 \;, \; para \;\; \|x\| \leq r-1 \\ 0 \;, \; para \;\; \|x\| \geq r; \\ ]0,1[\;\;, \; para \; r-1 < \|x\| < r. \end{cases}$$

Note que $g(\cdot)$ es la contraparte suave de $f(\cdot)$ definida en (2.14), $g_r(\cdot)$ es una contraparte suave y truncada de $f(\cdot)$, y que:

$$g(x) = \lim_{r\to\infty} g_r(x); \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, consideremos un proceso de difusión $\tilde{X} = \left\{\tilde{X}(t); 0 \leq t < \infty\right\}$ con generador infinitesimal $\tilde{\mathbf{A}}$, y condición inicial $\tilde{X}(0) = x_0$. En esta sección denotaremos por $\tilde{P}_{x_0}$ a la medida de probabilidad inducida por la solución del correspondiente problema de la martingala.

3.2. Problema de Dirichlet

La motivación para utilizar la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales a lo largo de este trabajo de tesis, se encuentra en la obtención de una estimación ilustrada posteriomente, de modo que ayude a analizar el problema planteado en (2.22), bajo la siguiente hipótesis que para obtener la solución, se recurre al problema de Dirichlet.

Problema 3.1 *Para* $k \geq k_0$, $r \geq 2$. *Asumimos momentaneamente que el problema de Dirichlet:*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}u_{k,r}(x) + g_r(x) &= 0 \ \ \text{sobre } \mathcal{D}_k, \\ u_{k,r}(x) &= 0 \ \ \text{sobre } \partial\mathcal{D}_k, \\ \lim_{\|x\|\to\infty} u_{k,r}(x) &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

tiene una única solución $u_{k,r}(\cdot)$ *en* $C^{2,\alpha}(\bar{\mathcal{D}}_k)$ *que satisface*

$$\sup_{x\in\mathcal{D}_k} |u_{k,r}(x)| < \infty$$

Más aún, asumimos que los valores $u_{k,r}(x_0)$ *de esta solución en* $x_0 \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}$, *para* $k \geq k_0$ *y* $r \geq 2$ *se comportan asintóticamente en el orden:*

$$\sup_{r\geq 2} |u_{k,r}(x_0)| = o(k\log k), \quad \textit{cuando } k \to \infty. \tag{3.5}$$

Esta hipótesis será utilizada posteriormente, pero por ahora momentaneamente nos concentraremos en su aplicación para llegar a la estimación que se requiere para el tratamiento del problema planteado en (2.22).

3.3. Estimación requerida para el tratamiento del problema

Bajo las condiciones planteadas anteriormente, aplicamos nuevamente la formula de Itô a $u_{k,r}(\tilde{X}(\cdot))$ e integramos sobre el intervalo $\left[0, \tilde{V}_k^{(N)}\right]$, donde $\tilde{V}_k^{(N)} = \tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k \wedge N$ y

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k &= \inf\left\{t > 0 : s(\tilde{X}(t)) = k\right\}, \\ \tilde{T}_k &= \inf\left\{t > 0 : s(\tilde{X}(t)) = k^{-k}\right\}; \ k \geq k_0 \ \text{ y } \ N \in \mathbb{N} \ \text{ fijo.} \end{aligned}$$

son tiempos de parada para $\tilde{X}(\cdot)$.

Ahora, tomando esperanza con respecto a $\tilde{P}_{x_0}$, obtenemos de (3.4):

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_{x_0}\left[u_{k,r}(\tilde{X}(\tilde{V}_k^{(N)}))\right] - u_{k,r}(x_0) \\ =\ &\tilde{E}_{x_0}\left[\int_0^{\tilde{V}_k^{(N)}} \left\langle \nabla u_{k,r}(\tilde{X}(t)), d\tilde{X}(t)\right\rangle + \int_0^{\tilde{V}_k^{(N)}} \tilde{\mathbf{A}}u_{k,r}(\tilde{X}(t))dt\right] \\ =\ &-\tilde{E}_{x_0}\left[\int_0^{\tilde{V}_k^{(N)}} g_r(\tilde{X}(t))dt\right], \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde se tiene que:

$$\tilde{E}_{x_0}\left[u_{k,r}(\tilde{X}(\tilde{V}_k^{(N)}))\right] = 0$$

pues, la esperanza de la martingala local es cero, como se dedujo anteriormente en la observación (2.3). También notamos que $\tilde{P}_{x_0}(\tilde{S}_k < \infty) = 1$, así la condición de frontera $u_{k,r}(\cdot) = 0$ sobre $\partial\mathcal{D}_k$ implica $u_{k,r}(\tilde{X}(\tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k)) = 0$ casi ciertamente. A partir de ahi y dado que también se tiene: $\sup_{x\in\mathcal{D}_k} |u_{k,r}(x)| < \infty$, obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \left|\tilde{E}_{x_0}\left[u_{k,r}(\tilde{X}(\tilde{V}_k^{(N)}))\right]\right| &= \left|\tilde{E}_{x_0}\left[u_{k,r}(\tilde{X}(N))\mathbf{1}_{\{N\leq \tilde{T}_k\wedge\tilde{S}_k\}}\right]\right| \\ &\leq \sup_{x\in\mathcal{D}_k} |u_{k,r}(x)| \cdot \tilde{P}_{x_0}(N < \tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k) \to 0; \\ \text{cuando } N &\to \infty; \ k \geq k_0 \ \text{y} \ r \geq 2. \end{aligned}$$

Luego, utilizando el teorema de convergencia dominada, haciendo tender $N \to \infty$ en (3.6) y utilizando la observación (2.5), obtenemos:

$$\tilde{E}_{x_0}\left[\int_0^{\tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k} g_r(\tilde{X}(t))dt\right] = u_{k,r}(x_0);\ k \geq k_0,\ r \geq 2. \tag{3.7}$$

Más aún, desde que

$$\tilde{E}(\tilde{S}_k) \leq ck^2 < \infty, \text{ para alguna constante } c$$

como nuevamente se muestra en la observación (2.5), se tiene que:

$$\begin{aligned} & \left|\tilde{E}_{x_0}\left[\int_0^{\tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k} g_r(\tilde{X}(t))dt - \int_0^{\tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k} g(\tilde{X}(t))dt\right]\right| \\ \leq\ & \tilde{E}_{x_0}\left[\int_0^{\tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k} \left|g_r(\tilde{X}(t)) - g(\tilde{X}(t))\right| dt\right] \\ \leq\ & \sup_{x \in \mathcal{D}_k} |g(x)| \cdot \tilde{E}_{x_0}\left[\tilde{S}_k \cdot 1\left\{\sup_{t \leq \tilde{S}_k}\left|\tilde{X}(t)\right| \geq r\right\}\right] \to 0, \text{ cuando } r \to \infty \end{aligned} \tag{3.8}$$

De aquí, bajo la condición dada en (3.5) sobre el comportamiento asintótico del problema de Dirichlet planteado anteriormente, y usando (3.7) y (3.8), obtenemos:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\tilde{E}_{x_0}\left[\int_0^{\tilde{T}_k \wedge \tilde{S}_k} g(\tilde{X}(t))dt\right]}{k \log k}\right| \leq \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{r\geq 2}\frac{|u_{k,r}(x_0|}{k \log k}\right) = 0 \tag{3.9}$$

Por lo tanto, este es un caso especial de (2.22), cuando las funciones $f(\cdot) \equiv g(\cdot)$ y los coeficientes de los operadores diferenciales $\mathcal{A} = \tilde{\mathbf{A}}$ son acotados, pertenecen a $C^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, y cuando la condición dada acerca del problema de Dirichlet se cumple. Desde el caso formulado en (2.7) y sus formas equivalentes (2.8), (2.12) y (2.22), discutidas en la anteriores secciones, estos problemas obtenidos implican que no existe triple colisión de partículas Brownianas.

3.4. Dimensión efectiva

En esta sección introducimos un concepto referido a la dimensión efectiva para el proceso de difusión $X(\cdot)$, en analogía con la teoría del problema exterior de Dirichlet, que será de gran ayuda para el desarrollo de los próximos resultados ilustrados en este trabajo de tesis.

A partir de ahí se tiene que, la matriz de difusión $\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \sigma_\nu(x)\mathbf{1}_{\mathcal{R}_\nu}$ dada anteriormente, tiene una característica especial en la asignación de sus autovalores, es decir, todos los autovalores; a excepción del autovalor más grande, tienen un valor pequeño, es decir, estos son de la forma $(1; \varepsilon; ...; \varepsilon)$, donde $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, y para algún $0 < \delta < \frac{1}{2}$, satisface:

$$\left|\frac{x' \sigma(x)\ \sigma(x)' x}{\|x\|^2} - 1\right| \leq \delta, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n, \text{ y } \frac{(n-1)\varepsilon^2 + \delta}{1-\delta} < 1 \tag{3.10}$$

Este es el caso cuando la matriz de difusión $\sigma(\cdot)$ puede ser escrita como $\sum_{\nu=1}^{m} \sigma_\nu(x)\mathbf{1}_{\mathcal{R}_\nu}$, donde las $(n \times n)-$matrices con coeficientes constantes $\{\sigma_\nu, \nu = 1, ..., m\}$ tienen la siguiente descomposición:

$$\sigma_\nu \sigma_\nu' = (y_\nu, B_\nu)diag(1, \varepsilon^2; ...; \varepsilon^2)\begin{pmatrix} y_\nu' \\ B_\nu' \end{pmatrix},$$

donde el $(n \times 1)-$ vector fijado $y_\nu \in \mathcal{R}_\nu$, satisface la condición:

$$\|y_\nu\| = 1, \quad \frac{|\langle x, y_\nu \rangle|^2}{\|x\|^2} \geq 1 - \varepsilon; \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.11}$$

y la $(n \times (n-1))-$ matriz B_ν, consistiendo de $(n-1)$ vectores ortonormales $n-$dimensionales, ortogonales a cada otro vector y ortogonal a y_ν, para $\nu = 1, ..., m$. Implican que para $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$\frac{\|x\|^2 \; \mathtt{traza}(\sigma(x) \; \sigma(x)')}{x'\sigma(x) \; \sigma(x)' x} - 1 \leq \frac{(n-1)\varepsilon^2 + \delta}{1-\delta} < 1.$$

Así, esto es suficiente para que el proceso estocástico $X(\cdot)$, colisione en el origen y en un tiempo finito.

Para evitar esta situación, se introduce la dimensión efectiva $ED_{\mathcal{A}}(\cdot)$ del operador diferencial elíptico de segundo orden $\mathcal{A}$, definido anteriormente, es decir:

$$ED_{\mathcal{A}}(x) = \frac{\|x\|^2 \; \mathtt{traza}(\sigma(x) \; \sigma(x)')}{x'\sigma(x) \; \sigma(x)' x} = \frac{\|x\|^2 \; \mathtt{traza}(A(x))}{x'A(x) \; x}, \tag{3.12}$$

para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Esta función es ampliamente utilizada en la teoría del llamado problema exterior de Dirichlet para ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden. Así, en las siguientes secciones, veremos que, si se cumple la condición:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} ED_{\tilde{\mathbf{A}}}(\cdot) > 2, \tag{3.13}$$

y esto será suficiente para la existencia de una solución para el problema de Dirichlet planteado en (3.4).

Luego, con $\sigma(\cdot)$ definido en (2.3), la dimensión efectiva $ED_{\mathcal{A}}(\cdot)$ satisface:

$$ED_{\mathcal{A}}(x) \geq \min_{\nu=1,\ldots,m} \left(\frac{|x|^2 \; \mathtt{traza}(\sigma_\nu(x) \; \sigma_\nu'(x))}{x'\sigma_\nu(x) \; \sigma_\nu'(x)' x} \right) \geq \min_{\nu=1,\ldots,m} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_{i\nu}(x)}{\max_{i=1,\ldots,n} \; \lambda_{i\nu}(x)} \right)$$

para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, donde $\{\lambda_{i\nu}(\cdot); \; i = 1, ..., n\}$, son los autovalores de la función matricial $\sigma_\nu(\cdot) \; \sigma_\nu'(\cdot)$, para $\nu = 1, ..., m$ en (2.3). Así, se deduce que $ED_{\mathcal{A}}(x) > 2$, siempre que se cumpla la condición:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}} \min_{\nu=1,\ldots,m} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_{i\nu}(x)}{\max_{i=1,\ldots,n} \; \lambda_{i\nu}(x)} \right) > 2 \tag{3.14}$$

Más aún, esta condición puede ser interpretada como una restricción para que el tamaño del máximo autovalor, no sea demasiado grande, cuando este sea comparado con los otros autovalores.

3.5. Problema de Dirichlet: caso suave

En esta parte del presente trabajo se discutirá el rol que juega la dimensión efectiva en el problema exterior de Dirichlet. Para $k \geq k_0$, el dominio $\mathcal{D}_k$ es un tubo infinito que contiene a x_0; es decir, es una traslación invariante de $x \to (x_1 + \xi, x_2 + \xi, x_3 + \xi, x_4, ..., x_n)$, para algún punto $x \in \mathcal{D}_k$ y $\xi \in \mathbb{R}$.

Dado que se tiene que $\mathcal{D}_k$ es ilimitado, usamos el problema exterior de Dirichlet, cuyo dominio es generado a partir de la reducción de un dominio suave acotado de $\mathbb{R}^n$. Para ello utilizaremos la noción de ϕ - sucesión, donde ϕ es el valor de frontera en el problema de Dirichlet. Así, cada elemento de la sucesión, es una solución con la condición de frontera común ϕ, para un subdominio, el cual está parametrizado por la distancia hacia el origen.

Para analizar la solución, introducimos una sucesión decreciente $\{\mathcal{E}_{k,p}; p \geq k+1, k \geq k_0\}$ de sub-dominios suaves y acotados de $\mathcal{D}_k$, definida por:

$$\mathcal{E}_{k,p} = \mathcal{S}(\mathcal{D}_k \cap B_p(0)); \quad p \geq k+1, \; k \geq k_0,$$

donde $B_p(x)$ es la bola n-dimensional con centro en x y radio $p > 0$; mientras que el operador $\mathcal{S}$ actúa sobre un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ de la forma $\mathcal{D}_k \cap B_p(0)$, cuya frontera ∂A no es de clase $C^{2,\alpha}$, de forma tal que la imagen de la frontera ∂A bajo una transformación determinada, llegue a ser de clase $C^{2,\alpha}$. Así mismo, se tiene que:

$$\mathcal{E}_{k,p} = \mathcal{S}(\mathcal{D}_k \cap B_p(0)) \subset \mathcal{D}_k \cap B_p(0) \subset \mathcal{E}_{k,p+1}; \quad p \geq k+1, \; k \geq k_0,$$

de modo que $\mathcal{D}_k = \cup_{p=k+1}^{\infty} \mathcal{E}_{k,p}$. Para tener una visión clara del problema consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 *Una forma de ilustrar la situación mencionada anteriormente es tomar de* $n = 3$. *Para* $p \geq k+1$, $k \geq k_0$ *el conjunto* $\mathcal{D}_k \cap B_p(0)$ *es la unión disjunta de un tubo con altura finita* $2\sqrt{p^2 - k^2}$ *y dos segmentos esféricos idénticos directamente opuestos. El tubo finito es colocado entre los dos segmentos esféricos, cada segmento esférico tiene agujero en su centro con un radio de* k^{-k} *y profundidad* $p - \sqrt{p^2 - k^2}$ *en* $\mathbb{R}^3$. *La superficie de hoyo en un círculo* $\partial B_p(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : s(x) = k^{-k}\}$. *Más aún, la intersección entre el tubo finito y los segmentos esféricos no son suaves en los círculos con centro en un punto de coordendas* $\sqrt{(p^2 - k^2)/3}(1,1,1)'$ *y* $-\sqrt{(p^2 - k^2)/3}(1,1,1)'$ *con el mismo radio* k. *Ahora tomamos la vecindad suave dada por* $\mathcal{S}$, *entonces para dimensiones mayores o iguales a cuatro* $(n \geq 4)$, *se puede realizar una similar construcción, desde que el dominio* $\mathcal{D}_k$ *contiene a las* n*-coordenadas de* $\mathbb{R}^n$ *y por ello se puede generalizar la construcción dada anteriormente.*

Una vez ilustrado el dominio elegido, iniciamos una sucesión del problema de Dirichlet para $C^{2,\alpha}-$dominios acotados $\mathcal{E}_{k,p}$; con $p \geq k+1$, $k \geq k_0$, $r \geq 2$, por lo que se tiene:

$$\tilde{\mathbf{A}}u_{k,p,r}(\cdot) + g_r(\cdot) = 0 \text{ en } \mathcal{E}_{k,p}, \quad u_{k,p,r}(\cdot) = 0 \text{ sobre } \partial\mathcal{E}_{k,p}. \tag{3.15}$$

Siendo así, construimos las soluciones al problema de Dirichlet y para ello se utiliza el siguiente resultado.

Lema 3.1 *El problema de Dirichlet formulado en (3.15), tiene única solución* $u_{k,r}(\cdot)$ *en* $C^{2,\alpha}(\overline{\mathcal{E}}_{k,p})$, *para cada* $k \geq k_0$, $p \geq k+1$, $r \geq 2$.

Ver [15] para tener una referencia de la prueba de este lema, la cual puede ser encontrada en el teorema (6.14) del libro de Gilbarg, D. y Trudinger, N.S. denominado: Elliptic partial differential equations of second order.

Así, con la ayuda de la existencia de una barrera en el infinito, se contruye la solución del problema de Dirichlet (3.4) cómo el límite de soluciones $u_{k,r}(\cdot)$ cuando $p \to \infty$.

Lema 3.2 *Sí (3.14) se cumple, el problema de Dirichlet (3.4) tiene única solución* $u_{k,r}(x)$ *en el espacio* $C^{2,\alpha}(\bar{\mathcal{D}}_k)$ *para cada* $k \geq k_0$, $r \geq 2$.

Ver [18] para tener una referencia de la prueba de este lema, la cual es detallada en el libro mencionado de Meyers, N. y Serrin, J. denominado: The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations.

A estas alturas del desarrollo del presente trabajo de tesis, es necesario notar que el problema de Dirichlet tiene buen comportamiento, debido la truncamiento, es decir, $g_r(\cdot)$ es cero fuera de la bola $B_r(0)$.

3.6. Función Barrera

En esta sección nos dedicaremos a obtener un cierto tipo de control para el comportamiento de la solución del problema de Dirichlet $u_{k,r}(\cdot)$, planteado en (3.4), a través de la reducción del problema n-dimensional a un problema 1-dimensional y a través de una cierta función barrera que tenga un buen comportamiento para el problema. Es por ello que se plantea el siguiente resultado:

Lema 3.3 *Suponemos que la función* $\nu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^2 *y que satisface la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:*

$$\nu''(t) + B(t)\nu'(t) = F(t); \qquad 0 \leq a \leq t \leq b, \tag{3.16}$$

donde $B(\cdot)$ *y* $F(\cdot)$ *son funciones continuas y se tiene que* $F(\cdot) \geq 0$. *Si* $\nu(a) = \nu'(a) = 0$, *entonces, se cumple que* $\nu(\cdot) \geq 0$, $\nu'(\cdot) \geq 0$ *en el intervalo* $[a,b]$.

Ver [18] para tener una referencia de la prueba de este lema, en el libro de Meyers, N. y Serrin, J. denominado: The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations, especificamente en el lema 2 de este trabajo.

De aquí en adelante, se denotará por $\nu(\cdot)$ a la solución particular de (3.16), de modo que se cumple: $\nu(\cdot) \geq 0$ con derivada $\nu'(\cdot) \geq 0$ en el intervalo $[a,b]$ y las condiciones de frontera $\nu(a) = \nu'(a) = 0$, donde $a = k^{-k}$ y $b = k$ para algunas funciones $B(\cdot)$ y $F(\cdot)$, las cuales serán especificadas posteriormente.

Luego, a partir de algunos cálculos, se tiene la siguiente expresión:

$$\tilde{\mathbf{A}}\nu(s(\cdot)) = \frac{1}{2}\tilde{O}(\cdot)\left(\nu''(s(\cdot)) + \frac{\nu'(s(\cdot))'}{s(\cdot)}(\tilde{R}(\cdot) - 1)\right) \text{ en } \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}\ , \tag{3.17}$$

donde se tiene que:

$$\tilde{O}(x) = \frac{x'DD'\tilde{A}(x)DD'x}{x'DD'x}, \quad \tilde{R}(x) = \frac{\mathrm{traza}(D'\tilde{A}(x)D)x'DD'x}{x'DD'\tilde{A}(x)DD'x}. \tag{3.18}$$

Ahora, recordando la definición (3.12) acerca de la dimensión efectiva, será necesario asumir que:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\tilde{\mathbf{A}}}(x) > 2, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\mathcal{Z}} \tilde{R}(x) > 2, \tag{3.19}$$

y escoger apropiadamente $B(\cdot)$ y $F(\cdot)$ dados en el lema anterior, de modo que

$$\begin{aligned} B(s(\cdot)) &= \frac{c_1}{s(\cdot)} \le \frac{\tilde{R}(\cdot)-1}{s(\cdot)}, \\ \frac{2\,|g_r(\cdot)|}{\tilde{O}(\cdot)} &\le F(s(\cdot)) = \frac{c_2}{s^2(\cdot)} \text{ en } \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}\ , \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde, se tiene que:

$$\begin{aligned} c_1 &= \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\mathcal{Z}} \tilde{R}(x) - 1 > 1; \\ c_2 &= 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^n-\mathcal{Z}} \left|\tilde{R}(x) - 2\right| > 0. \end{aligned}$$

Claramente se tiene que el número real c_2 existe, debido a que, $\tilde{R}(\cdot)$ es acotado en $\mathbb{R}^n - \mathcal{Z}$.

Observación 3.1 *Si comparamos $\tilde{R}(\cdot)$ con $ED_{\tilde{\mathbf{A}}}(\cdot)$, se puede ver a $\tilde{R}(\cdot)$ como una dimensión efectiva local, la cual caracteriza el comportamiento de las tres primeras coordenadas del proceso estocástico $n-$ dimensional, mientras $ED_{\tilde{\mathbf{A}}}(\cdot)$ es la dimensión efectiva global. En realidad, reemplazando la matriz D de $\tilde{R}(\cdot)$ en (3.18) por la matriz identidad I, obtenemos a $ED_{\tilde{\mathbf{A}}}(\cdot)$. Más aún, reemplazando la matriz D en la definición $s^2(x) = x'DD'x$ por la matriz identidad I, se obtiene $\|x\|^2$. Luego, a partir de la correspondencia entre $(I, ED_{\tilde{\mathbf{A}}}(\cdot), \|\cdot\|^2)$ y $(D, \tilde{R}(\cdot), s^2(\cdot))$, podemos tomar a la dimensión efectiva global $ED_{\tilde{\mathbf{A}}}(\cdot)$ para analizar el comportamiento de las $n-$ coordenadas y la dimensión efectiva local $\tilde{R}(\cdot)$ para analizar el comportamiento de las tres primeras coordenas del proceso estocástico $n-$ dimensional $X(\cdot)$. Por lo tanto, se tiene que la matriz D definida en el capítulo anterior, contiene la información de las primeras coordenadas de la matriz de difusión $\sigma(\cdot)$ correspondiente al proceso de difusión $X(\cdot)$.*

Observación 3.2 *Observemos que la expresión $g(\cdot)$ definida en (3.3) puede ser escrita como:*

$$\frac{g(\cdot)}{\tilde{O}(\cdot)} = \frac{\tilde{R}(\cdot)-2}{s^2(\cdot)} \quad \textit{en } \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}$$

Por lo tanto,se tiene que $\tilde{R}(\cdot) \ge 2$ es equivalente a $g(\cdot) \ge 0$.

Observación 3.3 *A partir de que $\tilde{A}(\cdot)$ es una matriz definida positiva y $\mathrm{rango}(D) = 2$, la matriz $D'\tilde{A}(\cdot)D$ es definida positiva y el número de sus autovalores no nulos es igual al $\mathrm{rango}(D'\tilde{A}(\cdot)D) = 2$. Esto implica que:*

$$\tilde{R}(x) \ge \frac{\sum_{i=1}^{3} \tilde{\lambda}_i^D(x)}{\max_{1\le i\le 3} \tilde{\lambda}_i^D(x)} > 1; \qquad x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}, \tag{3.21}$$

donde $\{\tilde{\lambda}_i^D(\cdot),\ i = 1;2;3\}$ son los autovalores de la matriz $D'\tilde{A}(\cdot)D$ de orden (3×3)

Por otro lado, se tiene una cota superior para $\tilde{R}(\cdot)$ y está dada por:

$$\tilde{R}(x) \le \frac{\mathrm{traza}(D'\tilde{A}(x)D)}{3\min_{1\le i\le n} \tilde{\lambda}_i(x)}; \quad x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}, \tag{3.22}$$

donde $\{\tilde{\lambda}_i(\cdot),\ 1 \le i \le n\}$ son los autovalores de la matriz $\tilde{A}(\cdot)$.

No está demas indicar que, mediante una serie de cálculos, se comprueba que $DD'DD' = 3DD'$, así como se tiene que $\{x \in \mathbb{R}^n : DD'x = 0\} = \mathcal{Z}$. Además sí $DD'x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, entonces se tiene:

$$\min_{1\le i\le n} \tilde{\lambda}_i(x) \le \frac{x'DD'\tilde{A}(x)DD'x}{x'DD'DD'x} = \frac{\tilde{O}(x)}{3} = \frac{\mathrm{traza}(D'\tilde{A}(x)D)}{3\tilde{R}(x)};$$

esto genera una cota superior para $\tilde{R}(\cdot)$, dada en la expresión anterior.

Queda por elegir a $B(\cdot)$ y $F(\cdot)$ como en (3.20), luego utilizando (3.15) y (3.17) para obtener:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}\nu(s(\cdot)) &\ge \frac{1}{2}\tilde{O}(\cdot)\,[\nu''(s(\cdot)) + B(s(\cdot))\nu'(s(\cdot))] = \frac{1}{2}\tilde{O}(\cdot)F(s(\cdot)) \\ &\ge |g_r(\cdot)| = \left|\tilde{\mathbf{A}}u_{k,p,r}(\cdot)\right| \text{ en } \mathcal{D}_k. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Entonces, aplicando el principio de máximo debil para ecuaciones diferenciales parciales definida en el dominio acotado $\mathcal{E}_{k,p}$ en la inecuación anterior (3.23), se cumple:

$$-\tilde{\mathbf{A}}\nu(s(\cdot)) \le \tilde{\mathbf{A}}u(\cdot) \le \tilde{\mathbf{A}}\nu(s(\cdot))$$

para cada $\phi-$secuencia $\{u_{k,p,r}(\cdot)\}$ con condición de frontera $u_{k,p,r}\,|_{\partial\mathcal{E}_{k,p}} = 0$. De ahí, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nu(s(\cdot)) - u_{k,p,r}(\cdot) &\le \max_{y\in\partial\mathcal{E}_{k,p}} |\nu(s(y)) - u_{k,p,r}(y)| = \max_{y\in\partial\mathcal{E}_{k,p}} \nu(s(y)), \\ \nu(s(\cdot)) + u_{k,p,r}(\cdot) &\le \max_{y\in\partial\mathcal{E}_{k,p}} |\nu(s(y)) + u_{k,p,r}(y)| = \max_{y\in\partial\mathcal{E}_{k,p}} \nu(s(y)). \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que

$$|u_{k,p,r}(x)| \le \max_{y\in\partial\mathcal{E}_{k,p}} \nu(s(y)) - \nu(s(x)), \quad x \in \mathcal{E}_{k,p}.$$

Ahora, el siguiente desarrollo está dado por el anterior lema (2.3), y se refiere a que $\nu'(s) \ge 0$, $\nu(a) = 0$ para $k^{-k} = a \le s \le b = k$. Por lo tanto, el máximo de $\nu(\cdot)$ sobre el intervalo $[a, b]$ es alcanzado en $b = k$.

A partir de ahi, se obtiene la siguiente acotación para cada $x \in \mathcal{E}_{k,p}$, $p \ge k+1$, $k \ge k_0$,

$$|u_{k,p,r}(x)| \le \max_{y\in\partial\mathcal{E}_{k,p}} \nu(s(y)) - \nu(s(x)) = \int_{s(x)}^{k} \nu'(t)dt. \tag{3.24}$$

Puesto que la solución $u_{k,r}(\cdot)$ del problema de Dirichlet es el límite de las $\phi-$secuencia $u_{k,p,r}(\cdot)$ cuando

$p \to \infty$, entonces la inecuación anterior también se cumple para $u_{k,r}(\cdot)$.

Ahora estamos en condiciones de verificar la propiedad asintótica dada en (3.5), para ello utilizaremos en siguiente lema.

Lema 3.4 *Supongamos que las condiciones dadas en (3.19) se satisfacen sobre ambas dimensiones efectivas la global y la local. Entonces, tomando las constantes* $c_1 > 1$, $c_2 > 0$ *dadas en (3.20), la solución* $u_{k,r}(\cdot)$ *al problema de Dirichlet dado en (3.4) satisface*

$$\sup_{r\ge2} |u_{k,r}(x_0)| \le \frac{c_2}{c_1-1}\log\left(\frac{k}{s(x_0)}\right) + \frac{c_2 k^{-(c_1-1)k}}{(c_1-1)^2}\left(\frac{1}{k^{(c_1-1)}} - \frac{1}{(s(x_0))^{(c_1-1)}}\right); k \ge k_0. \tag{3.25}$$

Prueba. *Dados* $B(\cdot)$ *y* $F(\cdot)$ *como en (3.20), entonces utilizando la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (3.16), se tiene:*

$$\begin{aligned} H(t) &= \exp\left[\int_a^t B(w)dw\right] = \exp\left[\int_a^t \frac{c_1}{w}dw\right] = \left(\frac{t}{a}\right)^{c_1}, \\ \nu'(t) &= \frac{1}{H(t)}\int_a^t H(w)F(w)dw = \frac{c_2}{c_1-1}\left[\frac{1}{t} - \left(\frac{a^{c_1-1}}{t^{c_1}}\right)\right] \end{aligned}$$

para $k^{-k} = a \le t \le b = k$. *Luego, a partir de (3.24), se obtiene la siguiente acotación:*

$$\begin{aligned} u_{k,p,r}(x) &\le \max_{y\in\partial\mathcal{E}_{k,p}} \nu(s(y)) - \nu(s(x)) = \int_{s(x)}^{k} \nu'(t)dt \\ &= \frac{c_2}{c_1-1}\log\left(\frac{k}{s(x)}\right) + \frac{k^{-(c_1-1)k}c_2}{(c_1-1)^2}\left(\frac{1}{k^{(c_1-1)}} - \frac{1}{(s(x))^{(c_1-1)}}\right);\ x \in \mathcal{E}_{k,p} \end{aligned}$$

la cual no depende de p *y* r. *Por tanto, como la acotación para* $\sup_{r\geq 2} u_{k,r}(\cdot)$ *está dado por:*

$$\begin{aligned}\sup_{r\geq 2} u_{k,r}(x) &= \lim_{p\to\infty} u_{k,p,r}(x)\\ &\leq \frac{c_2}{c_1-1}\log\left(\frac{k}{s(x)}\right)+\frac{k^{-(c_1-1)k}c_2}{(c_1-1)^2}\left(\frac{1}{k^{(c_1-1)}}-\frac{1}{(s(x))^{(c_1-1)}}\right);\ x\in\mathcal{E}_{k,p},\end{aligned}$$

entonces demostramos lo deseado.

■

Observación 3.4 *Podemos reemplazar la condición (3.19) sobre la dimensión local efectiva* $\tilde{R}(\cdot)$ *por una condición mas débil pero sobre una vecindad del conjunto* $\mathcal{Z}$; *es decir, que existe una constante* $\delta_0 > 0$ *donde se cumple:*

$$\inf_{0<s(x)\leq\delta_0} \tilde{R}(x) > 2 \qquad o \tag{3.26}$$

$$\tilde{R}(x) = 2 \quad \textit{cuando } 0 < s(x) \leq \delta_0. \tag{3.27}$$

Si (3.26) se cumple, entonces es posible modificar las función continua $B(\cdot)$ *de forma tal que:*

$$B(s) = \begin{cases} \tilde{c}_1/s;\ 0 < s \leq \delta_1, \\ \textit{interpolación lineal en } \delta_1 < s \leq \delta_0, \\ \tilde{c}_3/s;\ \delta_0 < s \leq \infty, \end{cases}$$

para algunas constantes

$$\tilde{c}_1 = \inf_{0<s(x)\leq\delta_0} \tilde{R}(x) - 1 > 1, \quad \tilde{c}_3 = \left(\inf_{s(x)\geq\delta_0} \tilde{R}(x) - 1\right) \vee \tilde{c}_1 > 0,$$

donde $0 < \delta_1 \leq \delta_0$, *para luego, obtener una similar inecuación para* $u_{k,r}(\cdot)$.

Si (3.27) se cumple, entonces se tiene:

$$B(s) = \begin{cases} 0;\ 0 < s \leq \delta_1, \\ \textit{interpolación lineal en } \delta_1 < s \leq \delta_0, \\ \tilde{c}_3/s;\ \delta_0 < s \leq \infty, \end{cases}$$

y

$$F(s) = \begin{cases} 0;\ 0 < s \leq \delta_1, \\ \textit{interpolación lineal en } \delta_1 < s \leq \delta_0, \\ c_2/s^2;\ \delta_0 < s \leq \infty, \end{cases}$$

donde c_2 *está definida como en las secciones anteriores en (3.20).*

3.7. Aproximación entre los generadores de difusión

Esta sección, está direccionada al desarrollo de la parte final del presente trabajo de tesis referido al estudio de aproximaciones para el caso no suave; donde $\mathcal{A}$ y $A(\cdot)$ fueron definidas en (2.6), y $f(\cdot)$ fué definida (2.14) del capítulo anterior; a través de aproximaciones dadas por el caso suave; donde $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{A}(\cdot)$ y $g(\cdot)$ fueron definidas en (3.1), (3.2) y (3.3), respectivamente, permitiendo así, utilizar los resultados formulados en las secciones anteriores. Ahora, recordando la definición de la dimensión efectiva dada en (3.12), podemos definir por analogía a (3.18), la dimensión local efectiva $R(\cdot)$ para el proceso estocástico $X(\cdot)$:

$$R(x) = \frac{\mathrm{traza}(D'A(x)D)x'DD'x}{x'DD'A(x)DD'x};\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.28}$$

Siendo así, en esta sección asumiremos que la dimensión efectiva $ED_{\mathcal{A}}(\cdot)$ y la dimensión local efectiva $R(\cdot)$ satisfacen:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\mathcal{A}}(x) > 2, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\mathcal{Z}} R(x) > 2. \tag{3.29}$$

Sea $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ la función de densidad n-dimensional Gaussiana estandar, entonces por definición se tiene que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$ y $|\rho(x)| \leq C(1+\|x\|)^{-n-c}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para algunas constante $C > 0$ y $c > 0$. A partir de ahí, definimos la función $\rho_\ell(x) = \ell^n \rho(\ell x)$ para $\ell \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, apelando a la operación de convolución de funciones se obtiene una sucesión de aproximaciones dada por:

$$a_{ij}^{(\ell)}(x) = \rho_\ell * a_{ij}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-z)a_{ij}(z)dz; \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.30}$$

Así mismo, en analogía con (3.1) y (3.2), definimos la sucesión de matrices $A^{(\ell)}(\cdot) = \left\{a_{ij}^{(\ell)}(\cdot)\right\}_{1\leq i,j\leq n}$ para $\ell \geq 1$. Por lo tanto, se obtiene una correspondiente sucesión de generadores infinitesimales $\mathcal{A}^{(\ell)}$; la dimensión efectiva $ED_{\mathcal{A}^{(\ell)}}(\cdot)$ sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ dada en (3.12); así como la función $f^{(\ell)}(\cdot)$, a lo largo de esta sección será utilizado a través de la operación de truncación definida anteriormente $f_r^{(\ell)}(\cdot) = f^{(\ell)}(\cdot)\zeta_r(\cdot)$, para $r \geq 2$; y finalmente la dimensión local efectiva $R^{(\ell)}(\cdot)$ definida en $\mathbb{R}^n - \mathcal{Z}$, para $\ell \geq 1$, cumpliendo así lo establecido en (3.18).

Para continuar con este desarrollo será necesario analizar y demostrar el siguiente lema, referido a la denominación de las sucesiones y autovalores de funciones matriciales.

Lema 3.5 *Bajo la hipótesis (3.29), y la matriz definida positiva $\sigma_\nu(\cdot)$ dada en (2.3) para $1 \leq \nu \leq m$, la aproximación de sucesiones satisfacen:*

$$y'A^{(\ell)}(x)y \geq \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\left(\min_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq\nu\leq m}} \lambda_{i\nu}(z)\right)\|y\|^2; \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Además, se cumple que:

$$\begin{aligned} \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\mathcal{Z}} R^{(\ell)}(x) &\geq \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\mathcal{Z}} R(x) > 2, \\ \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\mathcal{A}^{(\ell)}}(x) &\geq \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\mathcal{A}}(x) > 2; \quad \ell \geq 1, \end{aligned}$$

donde $\{\lambda_{i\nu}(\cdot), 1 \leq i \leq n\}$ son los autovalores de $\sigma_\nu(\cdot)\sigma'_\nu(\cdot)$ para $1 \leq \nu \leq m$.

Prueba. *Para demostrar la primera inecuación basta entender la definición de supremo y de mínimo, con lo cual esta inecuación es evidente. Ahora demostraremos la inecuación para la dimensión efectiva, bajo la hipótesis del lema dado y la definición de matriz $A^{(\ell)}(\cdot)$. Así se tiene que:*

$$\begin{aligned} \frac{x'A^{(\ell)}(x)x}{\|x\|^2} &= \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{R}_j} \rho_\ell(x-z)\cdot\frac{x'\sigma_j(x)\sigma_j'(x)x}{\|x\|^2}dz \\ &\leq \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{R}_j} \rho_\ell(x-z)\frac{\mathrm{traza}(\sigma_j(x)\sigma_j'(x))}{\inf_{y\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\mathcal{A}}(y)}dz = \frac{\mathrm{traza}(A^{(\ell)}(x))}{\inf_{y\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\mathcal{A}}(y)}, \end{aligned}$$

se cumple para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, donde R_j es una partición de $\mathbb{R}^n$ definida en las secciones anteriores. Por lo tanto:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\mathcal{A}^{(\ell)}}(x) \geq \inf_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} ED_{\mathcal{A}}(x) > 2,$$

se cumple bajo las condiciones dadas anteriormente y para la dimensión efectiva local la prueba se realiza de manera similar, verificando la otra inecuación correspondiente. ∎

Para $k \geq k_0$, $\ell \geq 1$, y $r \geq 2$, consideramos la sucesión de problemas de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(\ell)}u_{k,\ell,r}(\cdot) + f_r^\ell(\cdot) &= 0 \ \text{ en } \mathcal{D}_k, \\ u_{k,\ell,r}(\cdot) &= 0 \ \text{ sobre } \partial\mathcal{D}_k, \\ \lim_{\|x\|\to\infty} u_{k,\ell,r}(\cdot) &= 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Es necesario indicar que en las secciones anteriores se observó que la solución $u_{k,\ell,r}(\cdot)$ existe y se comporta asintóticamente como en (3.25), así como podemos escoger $c_1 > 1$ y $c_2 > 0$ independiente de ℓ, dado en (3.20); a partir de ahí formulamos el siguiente resultado.

Lema 3.6 *Bajo las condiciones anteriores dadas en (3.29), con la matriz definida positiva $\sigma_\nu(\cdot)$ dada en (2.3) para $1 \leq \nu \leq m$, existen constantes $c_1 > 1$, $c_2 > 0$ tal que la solución $u_{k,\ell,r}(\cdot)$ para el problema de Dirichlet (3.29) existe y satisfacen:*

$$E_{x_0}\left[\int_0^{S_k \wedge T_k} f_r^{(\ell)}(X(t))dt\right] = u_{k,\ell,r}(x_0);\ k \geq k_0, \ell \geq 1, r \geq 2,$$

así como:

$$\sup_{r\geq 2}|u_{k,\ell,r}(x_0)| < \frac{c_2}{c_1-1}\log\left(\frac{k}{s(x_0)}\right) + \frac{k^{-(c_1-1)k}c_2}{(c_1-1)^2}\left(\frac{1}{k^{(c_1-1)}} - \frac{1}{(s(x_0))^{(c_1-1)}}\right);\ k \geq k_0,\ \ell \geq 1.$$

Prueba. En efecto, razonando como en la sección (3.3), para una situación específica dada en (3.7), de la misma forma se logra obtener el siguiente resultado:

$$E_{x_0}\left[\int_0^{S_k \wedge T_k} f_r^{(\ell)}(X(t))dt\right] = u_{k,\ell,r}(x_0);\ k \geq k_0, \ell \geq 1, r \geq 2.$$

Así mismo, utilizando el Lema (3.4), se obtiene que:

$$\sup_{r\geq 2}|u_{k,\ell,r}(x_0)| < \frac{c_2}{c_1-1}\log\left(\frac{k}{s(x_0)}\right) + \frac{k^{-(c_1-1)k}c_2}{(c_1-1)^2}\left(\frac{1}{k^{(c_1-1)}} - \frac{1}{(s(x_0))^{(c_1-1)}}\right);\ k \geq k_0,\ \ell \geq 1,$$

con lo cual se demuestra el presente Lema. ■

Ahora consideraremos la aproximación de sucesiones (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P^\ell)$, $\{\mathcal{F}_t\}$ para la solución débil (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\{\mathcal{F}_t\}$ de la ecuación diferencial estocástica. Así mismo, sea $P_{x_0}^{(\ell)}$ la medida de probabilidad inducida por el problema de la martingala correpondiente a la aproximación del operador elíptico $\mathcal{A}^{(\ell)}$ con condición inicial $X(0) = x_0$. Para dar continuidad al análisis estocástico formulado en esta sección, es necesario enunciar el siguiente Lema:

Lema 3.7 *(Estimación de Alexandroff) Si el soporte de la función $g \in C_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, es un conjunto acotado, entonces para todo $p > n$, $K > 0$, se tiene*

$$\left|E_{x_0}\left(\int_0^K g(X(t))dt\right)\right| \leq C\,\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

donde C es alguna constante que dependa de p, K solamente, y el $\inf_x \min_{1\leq i\leq n, 1\leq \nu\leq m} \lambda_{i\nu}(x)$, es una cota inferior sobre el conjunto de los autovalores de $\sigma_\nu(\cdot), \nu = 1, ..., m$.

Ver [19] para tener una referencia de la prueba de este lema, en el libro de Stroock, D. W. y Varadhan, S. R. titulado: Multidimensional difusión processes.

Ahora, utilizando este resultado, se obtiene una aproximación de las sucesiones para las medidas de probabilidad $\{P_{x_0}^{(\ell)}\}_{\ell\geq 1}$, así como y su convergencia débil a P_{x_0}. Aplicando el teorema del mapeo continuo a la integral, y utilizando estimaciones similiares a las realizadas en las secciones previas, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.8 *Bajo las condiciones dadas anteriormente, se cumple:*

$$\lim_{\ell\to\infty} E_{x_0}^{(\ell)}\left[\int_0^{T_k \wedge S_k} f_r^{(\ell)}(X(t))dt\right] = E_{x_0}\left[\int_0^{T_k \wedge S_k} f_r(X(t))dt\right], \tag{3.32}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned} E_{x_0}\left[\int_0^{T_k \wedge S_k} f(X(t))dt\right] &= \lim_{r\to\infty}\lim_{\ell\to\infty} E_{x_0}^{(\ell)}\left[\int_0^{T_k \wedge S_k} f_r^{(\ell)}(X(t))dt\right] \\ &= \lim_{r\to\infty}\lim_{\ell\to\infty} u_{k,\ell,r}(x_0). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Prueba. Antes de todo, observemos primero que:

$$\lim_{\ell\to\infty}\left|f_r^{(\ell)}(X(t))-f_r(X(t))\right|=0,\quad 0\le t\le T_k\wedge S_k;\quad P_{x_0}^{(\ell)}-\text{casi ciertamente (c.c.)},\ \ell\ge 1.$$

En realidad, desde que $a_{ij}^{(\ell)}(x)$ converge a $a_{ij}(x)$ cuando ℓ tiende a infinito, para cada x con $a_{ij}(x)$ continuo, para cada $1\le i,j\le n$, se tiene que la matriz norma $\left\|A^{(\ell)}(\cdot)-A(\cdot)\right\|=\text{máx}_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}^{(\ell)}(\cdot)-a_{ij}(\cdot)\right|$ converge a cero, excepto para los puntos en la unión $\cup_{j=1}^m\partial R_j$ que son posiblemente los puntos discontinuos. Luego, este conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida cero con respecto a la medida de Lebesgue. De ahí que, utilizando el hecho que el proceso estocástico X es no degenerado bajo la probabilidad $P_{x_0}^{(\ell)}$, tenemos que para $t\in[0,T_k\wedge S_k]$:

$$\begin{aligned}\left|f_r^{(\ell)}(X(t))-f_r(X(t))\right| &\le \left|\frac{\text{traza}(D'(A^{(\ell)}(x)-A(x))D)}{x'DD'x}\right|\zeta_r(x)\Big|_{x=X(t)}\\ &\quad+\left|\frac{2x'DD'(A^{(\ell)}(x)-A(x))DD'x)}{(x'DD'x)^2}\right|\zeta_r(x)\Big|_{x=X(t)}\\ &\xrightarrow{P_{x_0}^{(\ell)}\text{c.c}} 0,\ \text{cuando}\ \ell\to\infty.\end{aligned}$$

Más aún, retomando a la observación (2.5), podemos asumir que la variable aleatoria $f_r(X(t))$ y $f_r^{(\ell)}(X(t))$ son acotadas por una constante k^k cuando $t\in[0,T_k\wedge S_k]$, es decir:

$$|f_r(X(t))|\vee\left|f_r^{(\ell)}(X(t))\right|\le C.k^k;\quad 0\le t\le T_k\wedge S_k, \tag{3.34}$$

para alguna constante positiva C independiente de (k,ℓ,r,t), y así es la diferencia $\left|f_r^{(\ell)}(X(t))-f_r(X(t))\right|$, también es acotada cuando $t\in[0,T_k\wedge S_k]$. Por lo tanto, por el teorema de convergencia dominada, se tiene que:

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_0^{T_k\wedge S_k}\left(f_r^{(\ell)}(X(t))-f_r(X(t))\right)dt=0,\ P_{x_0}^{(\ell)}-\text{c.c.};\ell\ge 1. \tag{3.35}$$

Luego, a partir de que $\int_0^{T_k\wedge S_k}f_r(X(t))dt$ define un funcional continuo acotado sobre el conjunto de procesos estocásticos $X(\cdot)$, obtenemos por la convergencia de $P_{x_0}^{(\ell)}$ a P_{x_0} y aplicando el teorema de la función continua:

$$\lim_{\ell\to\infty}\left|E_{x_0}^{(\ell)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}f_r^{(\ell)}(X(t))dt\right]-E_{x_0}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}f_r(X(t))dt\right]\right|=0. \tag{3.36}$$

Además, dado que (3.34) se cumple que obtenemos:

$$\left|\int_0^{T_k\wedge S_k}(f_r^{(\ell)}(X(t))-f_r(X(t)))dt\right|\le 2C\cdot k^kS_k<\infty.$$

Por lo tanto, utilizando (3.35) y la estimación $E_{x_0}^{(\ell)}[S_k]\le C'k^2<\infty$ obtenida en la observación anterior (2.5), para alguna constante C', y el teorema de convergencia dominada; se obtiene:

$$\lim_{\ell\to\infty}\left|E_{x_0}^{(\ell)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}\left(f_r^{(\ell)}(X(t))-f_r(X(t))\right)dt\right]\right|=0;\ \ell\ge 1. \tag{3.37}$$

Finalmente, dado $\varepsilon>0$, utilizando (3.36), tomando ℓ_0, tal que:

$$\left|E_{x_0}^{(\ell_0)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}f_r^{(\ell_0)}(X(t))dt\right]-E_{x_0}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}f_r(X(t))dt\right]\right|<\varepsilon.$$

y utilizando (3.35) y (3.37) con $\tilde{\ell}$, de tal modo que:

$$\left|\int_0^{T_k\wedge S_k}(f_r^{(\ell_0)}(X(t))-f_r^{(\tilde{\ell})}(X(t)))dt\right|<\varepsilon,\quad P_{x_0}^{(\ell_0)}-\text{c.c.}$$

y

$$\left| E_{x_0}^{(\ell_0)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}(f_r^{(\tilde{\ell})}(X(t))-f_r(X(t)))dt\right]\right|<\varepsilon.$$

Se obtiene a partir de la desigualdad triangular que:

$$\begin{aligned}
&\left| E_{x_0}^{(\ell_0)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f_r^{(\ell_0)}(X(t))dt\right]-E_{x_0}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f_r(X(t))dt\right]\right| \\
\leq\ &\left| E_{x_0}^{(\ell_0)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}(f_r^{(\ell_0)}(X(t))-f_r^{(\tilde{\ell})}(X(t)))dt\right]\right| \\
&+\left| E_{x_0}^{(\ell_0)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f_r(X(t))dt\right]-E_{x_0}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f_r(X(t))dt\right]\right| \\
&+\left| E_{x_0}^{(\ell_0)}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k}(f_r^{(\tilde{\ell})}(X(t))-f_r(X(t)))dt\right]\right| \\
<\ & 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, esto demuestra aquello planteado en (3.32), y finalmente para demostrar (3.33) se procede manera similar aquello realizado en (3.8), con esto queda se demuestrado las dos afirmaciones indicadas anteriormente. ■

Como una observación podemos indicar que dados los lemas (3.6) y (3.8) se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{E_{x_0}\left[\int_0^{T_k\wedge S_k} f(X(t))dt\right]}{k\log k}=\lim_{k\to\infty}\lim_{r\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\left(\frac{u_{k,\ell,r}(x_0)}{k\log k}\right)=0, \tag{3.38}$$

con lo cual podemos responder aquellas interrogantes formuladas en el capitulo anterior.

3.8. Formulación y comprobación de resultados

Una vez elaborado aquellos resultados preliminares y generales referidos al problema tratado durante el presente trabajo de tesis, estamos en condiciones para poder analizar el desarrollo de la parte central de este trabajo de tesis, acerca del estudio de la triple colisión de partículas Brownianas. Para tal, primero estudiaremos la ausencia de la colisión de las partículas Brownianas, lo cual constituye un análisis fundamental y está dada a través de la siguiente proposición.

Proposición 3.1 *Supongamos que las matrices $\sigma_\nu(\cdot)$, $\nu=1,...,m$ definida en (2.3) son uniformemente acotadas, definidas positivas, y satisfacen las condiciones (3.29). Entonces para la solución débil $X(\cdot)$ del problema (2.5) con inicio en algún $x_0\in\mathbb{R}^n-\mathcal{Z}$, se tiene:*

$$P_{x_0}\left(X_1(t)=X_2(t)=X_3(t),\ \textit{para algún}\ t>0\right)=0. \tag{3.39}$$

Prueba. La estructura de este resultado fue desarrollado durante el capítulo anterior, en la cual se demostró la equivalencia entre las condiciones dadas en (2.7) y las condiciones dadas en (2.8), (2.12), (2.22), para $i=1$, $j=2$, $k=3$. Así mismo, en la sección anterior, especificamente a través de los lemas (3.6) y (3.8) se pudo obtener el resultado (3.38), que es una situación específica de (2.22); lo cual permite demostrar aquel propósito sobre la ausencia de una triple colisión de partículas Brownianas bajo las condiciones dadas en el presente trabajo, es decir:

$$P_{x_0}\left(X_1(t)=X_2(t)=X_3(t),\ \text{para algún}\ t>0\right)=0$$

■

Por otro lado, con respecto al estudio de la presencia de la triple colisión de partículas Brownianas, se formula el siguiente resultado.

Proposición 3.2 *Suponemos que las matrices $\sigma_\nu(\cdot)$, $\nu = 1, ..., m$ definidas en (2.3) son uniformemente acotadas y definidas positivas, y que $R(\cdot) \leq 2-\eta$ se cumple en $\mathbb{R}^n - \mathcal{Z}$, para algún $\eta \in (0,2)$. Entonces la solución débil $X(\cdot)$ del problema (2.5) iniciando en algún punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ satisface:*

$$P_{x_0}\left(X_1(t) = X_2(t) = X_3(t),\ \textit{infinitamente después para } t > 0\right) = 1. \tag{3.40}$$

Prueba. En efecto, si tomamos la descomposición de la semimartingala a través del proceso $s(X(\cdot))$, dada por $ds(X(t)) = h(X(t))dt + d\Theta(t)$, donde:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2s^3(x)}\left(s^2(x)\sum_{i=1}^{3} d_i'\sigma(x)\sigma'(x)d_i - \left\|\sum_{i=1}^{3} d_i'\sigma(x)\sigma'(x)d_i\right\|^2\right) \\ &= \frac{x'DD'x \cdot \mathrm{traza}\,(D'A(x)D) - x'DD'A(x)DD'x}{2\,(x'DD'x)^{3/2}} \\ &= \frac{(R(x)-1)\,O(x)}{2s(x)};\quad x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}, \end{aligned} \tag{3.41}$$

y la martingala local continua $\Theta(\cdot)$, junto con con su proceso de variación cuadrática $\langle\Theta\rangle(\cdot)$, dados por:

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{d_i'\sigma(X(\tau))\sigma'(X(\tau))d_i}{s(X(\tau))}\right) dW(\tau), \\ \langle\Theta\rangle(t) &= \int_0^t \frac{x'DD'A(x)DD'x}{x'DD'x}\Big|_{x=X(\tau)}\, d\tau = \int_0^t O(X(\tau))d\tau;\ 0 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

respectivamente; podemos visualizar la siguiente relación entre las funciones $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, $s(\cdot)$, $O(\cdot)$, $R(\cdot)$ y la martingala local $M(\cdot)$ dada en (2.18) y $\Theta(\cdot)$:

$$\begin{aligned} s^2(x)f(x) &= (R(x)-2)O(x) = 2s(x)h(x) - O(x);\quad x \in \mathbb{R}^n - \mathcal{Z}, \\ s(X(t))dM(t) &= d\Theta(t);\quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Luego, aplicando la fórmula de Itô a el proceso estocástico $\log s(X(\cdot))$, junto con la semimartingala descompuesta anteriormente y sus relaciones, podemos actuar de manera similar como en la ecuación diferencial estocástica definida en (2.17) de $\log s(X(\cdot))$. Ahora definimos el tiempo de parada $\Lambda_u = \inf\{t \geq 0 : \langle\Theta\rangle(t) \geq u\}$. Entonces, por el teorema de Dambis - Dubins - Schwarz; cuya prueba puede ser encontrado en [2], acerca del tiempo de cambio para martingalas, se obtiene:

$$s(X(\Lambda_u)) - s(x_0) = \int_0^{\Lambda_u} h(X(t))dt + B(u);\quad 0 \leq u < \infty,$$

donde se tiene que $B(u) = \Theta(\Lambda_u)$, $0 \leq u < \infty$ es un movimiento Browniano estandar. Así, entonces podemos definir el proceso $\mathfrak{s}(\cdot) = s(X(\Lambda_\cdot))$, de modo que satisface:

$$d\mathfrak{s}(u) = h(X(\Lambda_u))\Lambda_u' du + dB(u);\quad 0 \leq u < \infty \tag{3.42}$$

y que además se tiene que:

$$h(X(\Lambda_u))\Lambda_u' = \frac{[R(X(\Lambda_u)) - 1]\,O(X(\Lambda_u))}{2s(X(\Lambda_u))}.\frac{1}{O(X(\Lambda_u))} = \frac{\mathfrak{d}(u)-1}{2\mathfrak{s}(u)},$$

para $\mathfrak{d}(u) = R(X(\Lambda_u))$. Así, la dinámica del proceso $\mathfrak{s}(\cdot)$ es comparable con la de un proceso de Bessel $n-$dimensional, es decir:

$$d\mathfrak{r}(u) = \frac{d-1}{2\mathfrak{r}(u)}du + dB(u);\quad 0 \leq u < \infty,$$

desde que, las condiciones de esta proposición sean satisfechas, se tiene $\mathfrak{d}(\cdot) \leq 2 - \eta = d$. Por lo tanto, se tiene que el proceso $\mathfrak{s}(\cdot)$ es dominado por el proceso de difusión de Bessel $\mathfrak{r}(\cdot)$, donde $d \leq 2$ y con esto el objetivo planteado en este trabajo es alcanzado gracias a los resultados planteados y a la propiedad fuerte de Markov. Es decir, la colisión de partículas Brownianas ocurre desde que se cumpla las condiciones dadas en su formulación para un tiempo dado infinitamente después. ■

Con estas dos proposiciones se concluye el análisis sobre el estudio de la triple colisión de partículas Brownianas. En la primera proposición se estudia la ausencia de la colisión de partículas Brownianas, y en la segunda proposición se estudia la ocurrencia de una la colisión entre estas partículas Brownianas. Esto será de mucha ayuda en el estudio del movimiento de las trayectorias de un determinado proceso estocástico, llegando a obtener la probabilidad de la colisión de estas partículas, así como, aplicar estos resultados a diversos campos de la ciencia, con mucha utilidad en el campo de las finanzas y economía, a través de una ley que gobierna la evolución de un determinado proceso, la cual está dada por la solución de una determinada ecuación diferencial estocástica, constituyendo así un modelo matemático que puede ser empleado en otros campos de la ciencia e ingeniería.

3.9. Conclusiones

- A lo largo del presente trabajo, se realizó el estudio del campo del análisis estocástico, recordando acerca de los procesos generalizados, el movimiento Browniano, y otros, con ello se fundamento la presente tesis y se presentaron una serie de resultados que muestran la importancia de esta rama de la matemática, pues se estudió por ejemplo la diferenciabilidad en un sentido distribucional, poco analizado en las diferentes ramas de la matemática, marcando la diferencia con el sentido común de la diferenciabilidad, con ello logramos entender al movimiento Browniano y como se comportan sus caminos aleatorios.
- Podemos mencionar, que se profundizó estudio realizado, en cuanto a la relación existente entre el análisis estocástico y las ecuaciones en derivadas parciales, esto se hizo mediante el planteamiento de operadores diferenciales, que posteriormente nos fueron de mucha utilidad para abordar el problema de Dirichlet, que nos ayudó a obtener varios resultados aplicados en el presente trabajo de tesis.
- El planteamiento del problema estudiado en la presente tesis, que trata acerca del movimiento de las partículas Brownianas y de la colisión de dichas partículas, para el estudio de este interesante fenómeno, fue necesario obtener formas equivalentes a este problema; sustentadas por una serie de resultados que muestran el amplio campo en el cual se puede desarrollar el análisis estocástico, estas formas equivalentes ayudan a explicar y entender el comportamiento de las partículas Brownianas, especialmente cuando ocurre o no la colisión de dichas partículas, y para ello se obtuvo la probabilidad de dos eventos de ocurrencia o no ocurrencia de la colisión de partículas Brownianas, que muestran que se puede predecir la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso, con ciertas condiciones impuestas sobre los coeficientes de deriva y difusión presentes en la ecuación diferencial estocástica estudiada en el presente trabajo de tesis y principalmente entendiendo el comportamiento de los caminos aleatorios del proceso estocástico en estudio, los cuales pueden ser predecidos con ayuda del análisis estocástico y la teoría de probabilidad.
- Se observa, según los últimos resultados propuestos en el trabajo de investigación y sobre los cuales gira el desarrollo de la presente tesis, que la probabilidad de colisión de partículas Brownianas sucede cuando el coeficiente de difusión obedece a ciertas condiciones impuestas sobre él y el coeficiente de deriva es igual a cero, con ello se puede realizar un estudio detallado del movimiento de las partículas, según como se comporten estos dos coeficientes y las condiciones que se impongan sobre ellos.

3.10. Sugerencias

- Se presentaron muchos resultados llamativos, que invitan a estudiar con mucho más detenimiento al cálculo estocástico, es por ello que se invita a profundizar el estudio de esta rama de la matemática, puesto que sus contribuciones actuales son de vital importancia en el desarrollo de las diferentes ciencias.
- La relación existente entre el análisis estocástico y las ecuaciones en derivadas parciales, constituyen un campo por estudiar extenso, es por ello que se resalta los resultados obtenidos en los capítulos dos y tres, especialmente con el problema de Dirichlet, que constituye un interesante resultado y que su relación con los procesos estocásticos es resaltante, por ello se invita a continuar con el estudio de esta relación existente entre estas dos ramas de la matemática.
- Se puede observa, que la presente tesis deja resultados que pueden ser aplicados en el campo de las finanzas y la economía, por ejemplo en la igualdad de mercados, buscando obtener la probabilidad de ocurrencia de un suceso correspondiente a un determinado proceso estocástico que represente a la

igualdad de mercados y que utilice las condiciones planteadas en el presente trabajo de investigación, para luego estudiar el movimiento de sus caminos aleatorios del proceso en estudio, con ello se puede obtener simulaciones de cuando se llegará a obtener o no una igualdad de mercados, mediante la colisión de partículas Brownianas. Es por ello que se trata de resaltar la importancia del estudio del cálculo estocástico, por su aplicabilidad en diferentes ramas de la matemática y otras ciencias.

Bibliografía

[1] Tomoyuki Ichiba y Ioannis Karatzas - “On Collisions of Brownian Particles”, Ann. Appl. Probab. 20 (2010), 951-977.

[2] Ioannis Karatzas y Steven F. Shreve - “Brownian Motion and Stochastic Calculus”, Springer-Verlag, (1991).

[3] Benrt Oksendal - “Stochastic Differential Equations”, Springer, (2000).

[4] Ludwig Arnold - “Stochastic Differential Equations”, John Wiley & Sons, Inc., (1974).

[5] Zdzislaw Brzézniak y Tomasz Zastawniak - “Basic Stochastic Processes”, Springer- Verlag, (1999).

[6] Marek Capinski y Ekkehard Kopp - "Measure, Integral and Probability", Springer- Verlag, (2004).

[7] Lawrence C. Evans - .An Introduction to Stochastic Diferential Equations", UC Berkeley.

[8] David Nualart - Çálculo Estocástico", Universidad de Barcelona.

[9] J. Michael Steele - "Stochastic Calculus and Financial Applications", Springer- Verlag, (2001).

[10] I. M. Gel’fand y N. Vilenkin - "Generalized Functions", Academic Press, (1964).

[11] Banner, A. D., Fernholz, R. E., and Karatzas, I. (2005). Atlas models of equity markets. Ann. Appl. Probab. 15, 4, 2296–2330. MR MR2187296 (2007b:60160)

[12] Banner, A. D. and Ghomrasni, R. (2008). Local times of ranked continuous semimartingales. Stochastic Processes and their Applications 118, 1244–1253.

[13] Bass, R. F. and Pardoux, ´ E. (1987). Uniqueness for diffusions with piecewise constant coefficients. Probab. Theory Related Fields 76, 4, 557– 572. MR MR917679 (89b:60183)

[14] C´epa, E. and L´epingle, D. (2007). No Multiple Collisions for Mutually Repelling Brownian Particles. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1899. Springer Berlin, Heidelberg. S´eminaire de Probabilit´es XL.

[15] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. (2001). Elliptic partial differential equations of second order. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the 1998 edition. MR MR1814364 (2001k:35004)

[16] Krylov, N. V. (1980). Controlled Diffusion Processes. Applications of Mathematics, Vol. 14. Springer-Verlag, New York. Translated from the Russian by A. B. Aries. MR MR601776 (82a:60062)

[17] Krylov, N. V. (2004). On weak uniqueness for some diffusions with discontinuous coefficients. Stochastic Process. Appl. 113, 1, 37–64. MR MR2078536 (2005e:60119)

[18] Meyers, N. and Serrin, J. (1960). The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations. J. Math. Mech. 9, 513–538. MR MR0117421 (22 #8200)

[19] Stroock, D. W. and Varadhan, S. R. (2006). Multidimensional diffusion processes. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Reprint of the 1997 edition. MR MR2190038 (2006f:60005)